

Notas do Minicurso de Introdução a Teoria Quântica de Campos

Francisco Bento Lustosa

7 de dezembro de 2025

Resumo

O objetivo deste curso é introduzir estudantes em qualquer estágio de formação universitária ao assunto da Teoria Quântica de Campos. Apesar de não assumir nenhum conhecimento prévio de Mecânica Quântica, o curso não contará com uma introdução ao formalismo da relatividade especial de forma detalhada. Ênfase será dada à introdução dos conceitos relativos à Mecânica Quântica necessários à uma introdução à quantização de campos relativísticos. Uma breve introdução ao formalismo clássico Hamiltoniano será apresentada, seguida de uma descrição detalhada do formalismo e dos exemplos básicos da teoria quântica. Utilizaremos softwares computacionais e/ou programação com Python para ajudar na compreensão dos problemas básicos do oscilador harmônico e do poço de potencial, ressaltando a importância desses exemplos em aplicações na Teoria Quântica de Campos. Na segunda parte, introduziremos às equações de Klein-Gordon e de Dirac e discutiremos o conceito de vácuo quântico abrindo o caminho um entendimento básico de problemas modernos como o efeito Unruh e a radiação de Hawking. Na última parte discutiremos o papel fundamental das simetrias na Teoria Quântica de Campos, o conceito de spin e outros números quânticos, soluções de campos livres e suas aplicações.

Essas notas são um resumo dos conceitos discutidos no Minicurso de Introdução à Teoria Quântica de campos ministrado na Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu, campus da Universidade Estadual do Ceará (FECLI/UECE) ministrado pelo Dr. Francisco Bento Lustosa que é bolsista do Programa de Desenvolvimento Regional Científico e Tecnológico da Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico e com apoio do Conselho Nacional Científico e Tecnológico (PDCTR-FUNCAP/CNPQ - processo 305947/2024-9).

Referências do Curso

Essa lista inclui os livros e notas usados como base para este curso. Todo o conteúdo dessas notas pode ser encontrado nesses livros em maior detalhe e abordado com maior profundidade. Favor comunicar qualquer discrepância ou erro a chico.lustosa@uece.br.

1. Bohm, D. (1951). *Quantum Theory*, New York: Prentice Hall. 1989 reprint, New York: Dover, ISBN 0-486-65969-0. Bohm (1989)
2. Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., & Laloë, F. (2020). Quantum Mechanics, Volume I: Basic Concepts, Tools, and Applications (2nd ed.). (S. R. Hemley, N. Ostrowsky, & D. Ostrowsky, Trans.). Weinheim, Germany: Wiley-VCH. Cohen-Tannoudji *et al.* (2020)
3. Horbatsch, M. (1995). Horbatsch, M. (1995). *Quantum Mechanics using Maple®*. Springer Berlin, Heidelberg. Horbatsch (1995)
4. Zee, A. (2010). *Quantum Field Theory in a Nutshell* (2nd ed.). Princeton University Press. Zee (2010)
5. Mukhanov, V., & Winitzki, S. (2007). *Introduction to Quantum Fields in Classical Backgrounds*, This draft version is copyright 2003-2004 by Viatcheslav F. MUKHANOV and Sergei WINITZKI. Department of Physics, Ludwig-Maximilians University, Munich, Germany. The published final version is *Introduction to Quantum Effects in Gravity* Mukhanov and Winitzki (2007).
6. Tong, D. (2006). *Lectures on Quantum Field Theory*. University of Cambridge. Tong (2006)

Sumário

I	Introdução à Teoria Quântica de Campos	3
I.1	Conceitos Fundamentais	3
I.2	Dos Campos às Partículas	4
I.3	Revisão: Mecânica Clássica e Formalismo Hamiltoniano	5
I.3.1	Princípio de Mínima Ação	5
I.3.2	Derivação das Equações de Euler-Lagrange	5

1.3.3	Transformação de Legendre e Formalismo Hamiltoniano	7
1.3.4	Princípio da Correspondência e Quantização Canônica	7
1.4	Notação de Dirac e Estrutura Matemática da Mecânica Quântica	8
1.4.1	Espaços Vetoriais em Mecânica Quântica	9
1.4.2	Operadores Lineares e Suas Propriedades	10
1.4.3	Classificação de Operadores e Suas Propriedades Espectrais	10
1.4.4	Espaços de Hilbert: Estrutura e Propriedades	10
1.5	Equação de Schrödinger e o formalismo de Dirac	12

I Introdução à Teoria Quântica de Campos

"quantum theory in its present form actually presupposes the correctness of classical concepts. We shall then be led to the conclusion that classical concepts cannot be regarded as limiting forms of quantum concepts, but must instead be combined with quantum concepts in such a way that, in a complete description, each complements the other."

David Bohm, "Quantum Theory", 1951.

begin{equation}

1.1 Conceitos Fundamentais

No início do século XX Max Planck, Albert Einstein, Paul Ehrenfest, Niels Bohr e muitos outros trabalharam arduamente para entender os resultados experimentais que vinham da química, da termodinâmica e da física eletromagnética desafiando a sólida compreensão do Universo construída ao longo dos séculos anteriores. Um dos principais debates da época se dava em torno da existência de entidades básicas, discretas, constituidoras da matéria - moléculas, átomos ou partículas. Apesar de Ludwig Boltzmann ter realizado imensos avanços na compreensão da termodinâmica à partir de sua teoria cinética dos gases, foi apenas com os trabalhos de Einstein sobre o movimento Browniano que a ideia de que os líquidos, gases e sólidos pudessem ser constituídos por entidades discretas guiadas por leis físicas microscópicas foi aceita. Em particular, Max Planck, famoso por ter introduzido o conceito de quanta de radiação, era um dos maiores opositores à ideia de uma Natureza fundamentalmente discreta. Não obstante, os resultados experimentais do espectro atômico, perfeitamente descritos pelo modelo de Bohr, serviram de evidência inegável da natureza atômica da matéria. No entanto, sérias dúvidas permaneceram desafiando os físicos da geração seguinte à estender e melhorar as ideias de seus predecessores.

Durante o início da década de 1920, físicos em diferentes partes da Europa trabalhavam de maneira independente na tentativa de transformar as condições de quantização da energia de Planck e das órbitas de Bohr em uma teoria consistente dos fenômenos microscópicos. Já nesse período, uma das principais preocupações dos físicos da época era a consistência de uma nova teoria quântica à teoria da relatividade especial de Einstein, proposta em 1905, generalizada em 1915 na Teoria da Relatividade Geral e corroborada por inúmeras observações culminando com o eclipse de 1919. Nessa teoria todas as interações são limitadas por uma velocidade máxima c , a velocidade da luz se propagando no vácuo. No entanto, o formalismo que emergiu a partir de contribuições de físicos como Louis de Broglie, Erwin Schrödinger, Werner Heisenberg, Max Born, Pascual Jordan, Paul Dirac, Wolfgang Pauli e tantos outros, culminando no final da década no que chamamos hoje de Mecânica Quântica¹ era radicalmente diferente daquele desenvolvido por Einstein no contexto relativístico. Enquanto na teoria relativística todas as novas leis e previsões tem um limite não-relativístico claro e que corresponde com as teorias de Newton e de Maxwell, na Mecânica Quântica de Heisenberg, Born e Dirac o elemento fundamental da teoria, a função de onda, não só não tem correspondente clássico como exige uma revisão radical de conceitos fundamentais como posição, energia e medição de quantidades físicas. O livro de David Bohm de 1951 Bohm (1989) descreve com detalhes todos os conceitos e as aplicações básicas da Mecânica Quântica não-relativística bem como oferece uma visão bem clara das limitações fundamentais dessa "teoria"². Neste livro, em especial no Capítulo 23 intitulado "Relationship between Quantum and Classical Concepts", fica explícito que a descrição dos fenômenos quânticos oferecida pelos membros do que ficou conhecida como a "Escola de Copenhagen", é uma descrição que *pressupõe* a existência de um mundo clássico no qual os sistemas quânticos são observados. Isso ocorre porque qualquer estado físico é considerado como "indefinido" até que seja medido, e essa indefinição não é de forma alguma um artefato matemático mas uma imposição dos postulados da teoria quântica. Elétrons livres em uma caixa *não tem* posição, tem apenas uma superposição de *potenciais* posições que só podem ser observadas através da interação com um sistema clássico (uma tela fosforescente, por exemplo).

A principal limitação da teoria quântica está na sua incapacidade de fazer previsões para eventos individuais. Sendo os observáveis todos relacionados à autovalores de operadores que poderiam ter múltiplos valores, toda previsão se refere à probabilidades que só podem ser tornar evidentes depois de inúmeras repetições dos experimentos. Mas em 1927 todos os experimentos relevantes eram realizados com feixes de átomos ou elétrons contendo um número altíssimo de quanta e a visão probabilística dos fenômenos foi extremamente bem sucedida em prever corretamente resultados de experimentos em diversas áreas da física, incluindo fenômenos com efeitos relativísticos. Isso foi possível devido ao artigo monumental de Paul Dirac de 1928, "The Quantum Theory of the Electron", que derivou a equação de onda da mecânica quântica impondo a invariância relativística e pode demonstrar uma origem mais fundamental do spin do elétron a partir de suas simetrias. Muitos consideram esse o trabalho fundador da Teoria Quântica de Campos, pois a partir dele também foi possível prever a existência do "anti-elétron", o pósitron, que foi detectado pela primeira vez poucos anos depois.

¹O que se chama comumente de Mecânica Quântica é, na verdade, a interpretação de Copenhagen da Mecânica Quântica, já que se presume a ocorrência de colapso da função de onda, a necessidade do conceito de complementaridade para explicar o mundo clássico e uma desassociação do estado quântico a qualquer dinâmica física para evitar problemas com a relatividade especial através da não-localidade de estados não-separáveis.

²Alguns filósofos argumentam que o que os físicos costumam chamar de "Mecânica Quântica" é um conjunto de regras que permitem fazer previsões em situações específicas, mas sem uma interpretação clara e uma ontologia bem definida não se qualifica como uma Teoria.

Também foi nesse trabalho que ficou claro que efeitos relativísticos são fundamentais na compreensão da física sub-atômica e que é possível usar as simetrias clássicas como ponto de partida para teorias quânticas com poder de previsão de novos fenômenos inesperados.

Os anos subsequentes são talvez os anos mais intensos na história da física no que se trata da interação entre teoria e experimentos. A existência de pósitrons foi apenas o primeiro passo na longa história do estudo da anti-matéria que persiste até hoje e contém um dos grandes mistérios do nosso Universo: por que há mais matéria do que anti-matéria? Uma compreensão mais precisa dos fenômenos radioativos levou à descoberta das interações fracas e à previsão da existência dos neutrinos. Métodos perturbativos introduzidos nos anos 40 e 50 contribuíram para eliminar problemas de divergências que afetavam previsões para espalhamentos mais energéticos ou distâncias muito pequenas.

Resumo:

- **Fusão de teorias:** A Teoria Quântica de Campos emerge da síntese conceitual entre a Mecânica Quântica e a Relatividade Especial.
- **Pilares fundamentais:** Os princípios basilares de qualquer TQC são:
 - Princípio de superposição dos estados quânticos
 - Princípio de localidade (causalidade*)
- **Observáveis:** Na TQC, os observáveis são descritos por valores esperados de operadores atuando sobre os campos.
- **Campos como distribuições:** Formalmente, campos são distribuições que assumem valores em espaços de operadores definidos em domínios de espaços de Hilbert.
- **Relações de comutação:** Para o campo $\phi(x)$ e seu momento conjugado $\Pi(x)$, temos:

$$[\phi(x), \Pi(y)]_{x^0=y^0} = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (1)$$

- **Divergências:** No cálculo de amplitudes de transição entre estados do campo, surgem naturalmente divergências que requerem tratamento especial.
- **Contribuidores fundamentais na solução dessas divergências:** Dyson, Feynman, Salam, Schwinger, Tomonaga, Wick...
Leitura recomendada:
 - “Selected Papers on Quantum Electrodynamics”, J. Schwinger
 - “Richard Feynman e a QED”, V. Pleirez (Rev Bras de Ensino de Fís. 40(4) 2018)
- **Teorias de perturbação:** Métodos baseados em expansões perturbativas (acoplamento fraco) foram desenvolvidos para renormalizar e regularizar essas divergências.
- Teoria eletrofraca: resolveu a renormalização das interações fracas
- **Revolução das teorias de calibre:** (Anos 60/70) QCD (Cromodinâmica Quântica): descreveu consistentemente as interações fortes
- **Validação experimental:** A previsão e observação consistente de novas partículas, em especial hadrons (combinações de quarks), consolidou a aceitação das Teorias Quânticas de Campos como a descrição mais precisa do mundo subatômico.

1.2 Dos Campos às Partículas

Aprendemos na escola que os blocos básicos da matéria são partículas. Esta perspectiva persiste no ensino universitário, onde frequentemente descrevemos quarks e elétrons como “tijolos fundamentais” da matéria. No entanto, esta visão oculta uma realidade mais profunda: de acordo com nossas melhores teorias físicas, os constituintes fundamentais da Natureza **não são partículas discretas**, mas sim entidades contínuas, semelhantes a fluidos, distribuídas por todo o espaço - os **campos**. Os exemplos mais conhecidos são o campo elétrico e o campo magnético. As ondulações nesses campos manifestam-se como luz ou, mais genericamente, radiação eletromagnética. Quando examinamos essas ondas eletromagnéticas microscópicamente, descobrimos que elas são compostas por partículas denominadas **fótons**. Este fenômeno de “transformação” de ondulações campais em partículas através dos efeitos quânticos é universal:

- Existe um **campo do elétron** cujas excitações quantizadas correspondem aos elétrons
- Existem campos de quarks, glúons e bósons de Higgs

- Cada partícula constituinte de nosso corpo - e de todo o Universo - representa uma excitação quantizada do campo subjacente

Os campos quânticos são objetos intrinsecamente complexos por várias razões. Contêm em si toda a física, descrevendo inúmeras partículas interagindo de múltiplas formas. Além disso, o princípio de Heisenberg implica que campos quânticos nunca estão estáticos, mas sim em constante flutuação. O vácuo quântico é uma “sopa” borbulhante de partículas e antipartículas virtualmente criadas e destruídas. Até mesmo o conceito de “nada” (vácuo) torna-se complexo na TQC. A introdução de partículas distorce o vácuo de maneiras não triviais, e compreender estas distorções constitui fronteira ativa de pesquisa.

Na Física Clássica campos são gerados por fontes (“cargas”) associadas às simetrias dos campos. O potencial elétrico de Coulomb gerado por uma carga pontual em $r = 0$, por exemplo, é dado por:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (2)$$

O que ocorre quando $r \rightarrow 0$? A teoria clássica apresenta singularidades. Será que a teoria quântica resolve essas singularidades? Sistemas quânticos são descritos por funções de onda que introduzem incertezas fundamentais.

- **Comprimento de onda Compton do elétron:**

$$\lambda_c = \frac{\hbar}{m_e c} \approx 2.4 \times 10^{-12} \text{ m} \quad (3)$$

- **Incerteza mínima na localização:** λ_c representa a escala abaixo da qual a posição do elétron torna-se indefinida

- **Energia de flutuação correspondente:**

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda_c} \sim 0.5 \text{ MeV} \quad (4)$$

Para distâncias $r < \lambda_c$, tentativas de interação com o elétron levam à **criação de novas partículas**. Este fenômeno revela a necessidade de uma teoria que unifique consistentemente a relatividade e a mecânica quântica - a Teoria Quântica de Campos.

1.3 Revisão: Mecânica Clássica e Formalismo Hamiltoniano

1.3.1 Princípio de Mínima Ação

O princípio de mínima ação constitui um dos pilares fundamentais da mecânica clássica, fornecendo uma formulação elegante e poderosa para descrever a evolução temporal dos sistemas físicos. A mecânica quântica se baseia no formalismo clássico para a construção básica das suas equações. Em particular, é a partir do Hamiltoniano e das variáveis (q, p) do espaço de fase que obteremos as equações básicas que serão quantizadas pelo formalismo canônico.

Para um sistema descrito por uma coordenada generalizada $q(t)$ e com Lagrangiana $L(t, q(t), \dot{q}(t))$ a ação é definida como:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q(t), \dot{q}(t)) dt, \quad \text{onde} \quad \dot{q}(t) = \frac{dq}{dt} \quad (5)$$

Condição variacional: As trajetórias físicas são aquelas que extremizam a ação:

$$\delta S = 0 \quad (\text{condição necessária para trajetória física}) \quad (6)$$

Exemplo ilustrativo: Para o oscilador harmônico, a Lagrangiana é:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) \quad (7)$$

e a variação da ação escreve-se:

$$\delta S[q, \delta q] = S[q + \delta q] - S[q] \quad (8)$$

1.3.2 Derivação das Equações de Euler-Lagrange

Para deduzir as equações do movimento, consideraremos a variação primeira da ação:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}(t) \right] dt + O(\delta q^2) \quad (9)$$

Aplicando a integração por partes, $\int u \, dv = uv - \int v \, du$, com $u = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ e $dv = \delta \dot{q}(t) \, dt$, obtemos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}(t) \, dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q(t) \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q(t) \, dt \quad (10)$$

Substituindo na expressão original:

$$\delta S = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q(t) \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \delta q(t) \, dt + O(\delta q^2) \quad (11)$$

Condições de contorno e princípio variacional: considerando que $\delta q(t_1) = 0$ e $\delta q(t_2) = 0$ (variações nos extremos são nulas), e que δS não pode depender de termos de primeira ordem em $\delta q(t)$ (o princípio de mínima ação exige $\delta S = 0$ para trajetórias físicas), obtemos as **equações de Euler-Lagrange**:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (12)$$

Para o oscilador harmônico simples, temos:

$$S = \int L \, dt = \int \frac{1}{2} (\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) \, dt \Rightarrow \ddot{q} + \omega^2 q = 0 \quad (13)$$

A solução da equação do movimento é:

$$q(t) = A \cos(\omega(t + t_0)) + B \sin(\omega t) \quad (14)$$

Especificando as condições iniciais:

$$q(t_1) = q_1; \quad q(t_2) = q_2; \quad A = \frac{q_2 - q_1 \cos[\omega(t_2 - t_1)]}{\sin[\omega(t_2 - t_1)]} \quad (15)$$

Generalizações e Formalismo Funcional

Derivada funcional: A condição variacional pode ser expressa através da derivada funcional:

$$\frac{\delta S}{\delta q(t)} = 0 \quad (16)$$

Formulação com distribuições: Para derivadas de segunda ordem, reescrevemos usando distribuições:

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = \int [\delta''(t - t_1) + \omega^2 \delta(t - t_1)] q(t) \, dt \quad (17)$$

onde $\delta(t - t_1)[f] = f(t_1)$ define a ação da distribuição delta de Dirac.

Derivada funcional de funcionais lineares: Para um funcional linear $\int q(t) f(t) \, dt$, temos:

$$\frac{\delta}{\delta q(t_1)} \int q(t) f(t) \, dt = f(t_1) \quad (18)$$

Extensão para Teoria de Campos clássicos

Para um campo escalar em 3D:

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int d^3x \, dt (\nabla \phi)^2 \quad (19)$$

A derivada funcional fornece a equação de movimento:

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x, t)} = -\nabla^2 \phi(x, t) = -\Delta \phi(x, t) \quad (20)$$

Utilizamos a identidade:

$$\nabla \cdot (\delta \phi \nabla \phi) = \nabla \delta \phi \cdot \nabla \phi + \delta \phi \nabla^2 \phi \quad (21)$$

Aplicando o teorema da divergência:

$$\int d^3x \, dt \nabla \cdot (\delta \phi \nabla \phi) = \oint \delta \phi \nabla \phi \cdot d\vec{A} \quad (22)$$

sendo $d\vec{A}$ o elemento de área da fronteira, com a condição de que $\phi(x, t) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$.

1.3.3 Transformação de Legendre e Formalismo Hamiltoniano

Para uma função $f(x)$, definimos a transformação de Legendre:

$$p = \frac{df}{dx}, \quad g(p) = px(p) - f(x(p)), \quad x = \frac{dg}{dp}. \quad (23)$$

Aplicando essa transformação para substituir \dot{q} por p :

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad (24)$$

Assumindo que possamos encontrar $\dot{q} = v(p; q, t)$, definimos a **Hamiltoniana** como:

$$H(p, q, t) = [p\dot{q} - L(t, q, \dot{q})]_{\dot{q}=v(p; q, t)} \quad (25)$$

As equações de Euler-Lagrange transformam-se em:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} \Big|_{\dot{q}=v} \quad (26)$$

onde a solução de $\frac{dq}{dt} = v(p; q, t)$ deve ser substituída após a diferenciação. Calculando as derivadas parciais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q} &= \frac{\partial}{\partial q}(pv - L) = p\frac{\partial v}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial v}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} &= \frac{\partial}{\partial p}(pv - L) = v + p\frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial v}{\partial p} = v \end{aligned}$$

Obtemos assim as famosas equações canônicas de Hamilton:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \text{e} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (27)$$

Ação na forma Hamiltoniana:

$$S_H = \int [p\dot{q} - H(p, q, t)] dt \quad (28)$$

Variando a ação Hamiltoniana:

$$\delta S_H = \int \left[\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right] \delta p dt + \int \left[-\dot{p} - \frac{\partial H}{\partial q} \right] \delta q dt, \quad (29)$$

e utilizando integração por partes:

$$\int p\delta\dot{q} dt = - \int \dot{p}\delta q dt \quad (\text{usando } [p\delta q]_{t_1}^{t_2} = 0). \quad (30)$$

Portanto, as condições de extremização levam a:

$$\frac{\delta S_H}{\delta p} = 0 \Rightarrow \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}; \quad \frac{\delta S_H}{\delta q} = 0 \Rightarrow \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (31)$$

Esta formulação Hamiltoniana proporciona uma transição natural para a quantização dos sistemas clássicos, como veremos na próxima seção.

1.3.4 Princípio da Correspondência e Quantização Canônica

A quantização dos sistemas hamiltonianos segue o **princípio da correspondência**, primeiramente articulado por Niels Bohr como um princípio orientador para o desenvolvimento da teoria quântica. Bohr reconheceu que qualquer teoria quântica válida deve reproduzir a física clássica no limite em que os efeitos quânticos se tornam negligenciáveis. Este princípio foi inspirado pelo sucesso das condições de quantização anteriores (quantização de energia de Planck, integrais de espaço de fase de Bohr-Sommerfeld-Wilson), mas buscava uma conexão mais fundamental entre as descrições clássica e quântica.

Na mecânica quântica moderna, este princípio é matematicamente realizado através da **quantização canônica**, onde variáveis clássicas $(q(t), p(t))$ são promovidas a operadores quânticos $(\hat{q}(t), \hat{p}(t))$ que satisfazem as **relações canônicas de comutação**:

$$[\hat{q}(t), \hat{p}(t)] = i\hbar \quad (32)$$

A conexão com a mecânica clássica é explicitada através do **teorema de Ehrenfest**, que afirma que os valores esperados dos operadores quânticos obedecem às equações de movimento clássicas:

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{q}\rangle = \frac{\langle\hat{p}\rangle}{m}, \quad \frac{d}{dt}\langle\hat{p}\rangle = -\left\langle\frac{\partial V}{\partial q}\right\rangle \quad (33)$$

Na imagem de Heisenberg, a evolução dos operadores reflete diretamente a mecânica hamiltoniana clássica:

$$\frac{d\hat{q}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{q}]; \quad \frac{d\hat{p}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{p}] \quad (34)$$

Estas equações recuperam a mecânica clássica no limite $\hbar \rightarrow 0$:

$$\frac{d\hat{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} + O(\hbar); \quad \frac{d\hat{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} + O(\hbar) \quad (35)$$

A contribuição profunda de Paul Dirac foi reconhecer que a correspondência entre os colchetes de Poisson clássicos e os comutadores quânticos fornece a ponte essencial para a quantização:

$$\{q, p\}_{\text{PB}} = 1 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{i\hbar}[\hat{q}, \hat{p}] = 1 \quad (36)$$

Esta abordagem algébrica generaliza naturalmente para funções arbitrárias:

$$[\hat{q}, f(\hat{q}, \hat{p})] = i\hbar \frac{\partial f}{\partial p} \quad (37)$$

Nesta forma, relações algébricas entre operadores capturam a essência da teoria quântica, independentemente de qualquer representação específica dos estados. Essa percepção foi crucial para o desenvolvimento da teoria quântica de campos, onde as mesmas relações de comutação se aplicam aos operadores de campo. No entanto, uma notação onde os operadores variam com o tempo e os estados permanecem fixos pode ser substituída por uma onde os estados quânticos carreguem a evolução temporal e os operadores permaneçam fixos caracterizando os observáveis da teoria de maneira equivalente à formulação acima. Nas notações de Dirac ou de Schrödinger os estados quânticos têm papel central e como elas também se tornam úteis em diversos problemas de interesse atual na TQC nos tornaremos para elas pelas próximas seções.

1.4 Notação de Dirac e Estrutura Matemática da Mecânica Quântica

Antes de listarmos as definições necessárias para uma compreensão mais técnica da estrutura matemática da mecânica quântica, é importante relembrarmos os postulados da mesma em sua versão mais direta.

Postulado 1 — Espaço de estados

A cada sistema físico associa-se um espaço de Hilbert complexo separável \mathcal{H} . Um estado físico é representado por um vetor de estado $|\psi\rangle$, normalizado, ou por um operador densidade ρ que descreve estados puros e mistos. Estados puros são representados por funções de onda $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ no espaço de configurações.

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1, \quad \rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad \int |\psi(x)|^2 dx = 1.$$

Postulado 2 — Observáveis

Cada observável físico é representado por um operador auto-adjunto \hat{A} no espaço de Hilbert. Seus resultados possíveis são determinados pelo espectro do operador, formalizado pela decomposiçãopectral de von Neumann que associa a cada intervalo do espectro um projetor.

$$\hat{A} = \int a d\hat{P}_A(a).$$

Postulado 3 — Regra de Born e valores esperados

A probabilidade de obter um valor a na medida do observável A , quando o sistema está no estado ρ , é dada pela regra de Born. Para estados puros $|\psi\rangle$, a probabilidade pode ser escrita diretamente em termos da função de onda $\psi(x)$, usando representações apropriadas do operador projetor na base de posições ou de autovalores do observável.

$$P(a) = \text{Tr}(\rho P_A(a)), \quad P(a) = \langle\psi|P_A(a)|\psi\rangle.$$

$$\text{Na base de posições: } P(x_0) = |\psi(x_0)|^2.$$

$$\text{Para observáveis contínuos: } P(a) = |\langle a|\psi\rangle|^2.$$

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho \hat{A}) = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \int \psi^*(x) (\hat{A}\psi)(x) dx.$$

Postulado 4 — Evolução temporal

A evolução temporal de um sistema quântico é unitária e gerada pelo Hamiltoniano H . Dependendo da representação (Schrödinger, Heisenberg ou interação), a evolução ocorre nos estados, nos operadores ou em ambos. Todas as representações são matematicamente equivalentes e relacionadas por transformações unitárias.

Representação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle, \quad i\hbar \frac{d\rho}{dt} = [H, \rho].$$

Representação de Heisenberg:

$$\hat{A}_H(t) = U^\dagger(t)\hat{A}_S U(t), \quad i\hbar \frac{d\hat{A}_H}{dt} = [\hat{A}_H, H] + i\hbar \frac{\partial \hat{A}_S}{\partial t}.$$

Representação de Dirac/Interação:

$$|\psi_I(t)\rangle = e^{iH_0t/\hbar}|\psi_S(t)\rangle, \quad \hat{A}_I(t) = e^{iH_0t/\hbar}\hat{A}_S e^{-iH_0t/\hbar}, \\ i\hbar \frac{d}{dt}|\psi_I(t)\rangle = V_I(t)|\psi_I(t)\rangle, \quad V_I(t) = e^{iH_0t/\hbar}V e^{-iH_0t/\hbar}.$$

Postulado 5 — Processo de medida (colapso)

Após uma medida com resultado a , o estado do sistema sofre a atualização não unitária descrita pela regra de projeção de von Neumann (ou de Lüders). Esse processo descreve a transição descontínua do estado físico causada pelo ato de medir um observável.

$$|\psi\rangle \longrightarrow \frac{P_A(a)|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_A(a)|\psi\rangle}}, \quad \rho \longrightarrow \frac{P_A(a)\rho P_A(a)}{\text{Tr}(\rho P_A(a))}.$$

1.4.1 Espaços Vetoriais em Mecânica Quântica

A notação de Dirac proporciona uma linguagem poderosa e elegante para descrever a estrutura matemática da mecânica quântica.

- **Espaços de dimensão finita:** Compostos por uma coleção discreta de componentes, representando sistemas com número finito de estados.
- **Espaços de dimensão infinita:** Possuem infinitas componentes. O exemplo fundamental é o espaço L^2 das funções de onda:

$$L^2 = \left\{ \psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(q)|^2 dq < \infty \right\} \quad (38)$$

- **Interpretação de funções como vetores:** Uma função $\psi(q) \in L^2$ pode ser vista como um vetor com infinitas componentes $\psi_q = \psi(q)$.

- **Espaço de estados:** Para uma partícula pontual, o espaço de estados é exatamente L^2 quando $q = x$ representa a posição.
- **Generalização para TQC:** Em Teoria Quântica de Campos, as coordenadas x são substituídas por configurações de campos $\phi(x)$ e os estados tornam-se **funcionais** $\Psi[\phi(x)]$.

1.4.2 Operadores Lineares e Suas Propriedades

Linearidade: Um operador $A : V \rightarrow V$ satisfaz:

$$A(\alpha|v\rangle + \beta|w\rangle) = \alpha A|v\rangle + \beta A|w\rangle \quad (39)$$

Formas lineares e produtos escalares:

- **Formas lineares** $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ são funcionais que atuam em vetores $|v\rangle$ produzindo números complexos $\langle f|v\rangle$
- O **produto escalar** $\langle v|w\rangle$ permite definir elementos de matriz de operadores: $\langle w|A|v\rangle$
- **Autovetores e autovalores:** Se $|v\rangle$ é autovetor de A , então $A|v\rangle = \lambda|v\rangle$

Hermiticidade e conjugação:

- O produto escalar é **Hermitiano** se $\langle v|w\rangle^* = \langle w|v\rangle$, garantindo que $\langle v|v\rangle \in \mathbb{R}$
- O **conjugado Hermitiano** A^\dagger é definido por:

$$\langle v|A^\dagger|w\rangle = \langle w|A|v\rangle^* \quad (40)$$

- Propriedades da conjugação Hermitiana:

$$\begin{aligned} (A+B)^\dagger &= A^\dagger + B^\dagger \\ (\lambda A)^\dagger &= \lambda^* A^\dagger \\ (AB)^\dagger &= B^\dagger A^\dagger \end{aligned}$$

1.4.3 Classificação de Operadores e Suas Propriedades Espectrais

Tipos fundamentais de operadores:

- **Hermitiano:** $A = A^\dagger$ (observáveis físicos)
- **Anti-Hermitiano:** $A = -A^\dagger$
- **Unitário:** $AA^\dagger = A^\dagger A = I$ (evoluções temporais, rotações)

Propriedades espectrais de operadores Hermitianos:

- **Resultados de medida:** O resultado de qualquer medida é sempre um autovalor do operador correspondente
- **Observáveis:** Todos os observáveis físicos são representados por operadores Hermitianos
- **Autovalores reais:**

$$\text{Se } A|v_i\rangle = \lambda_i|v_i\rangle \text{ e } A = A^\dagger, \text{ então } \lambda_i \in \mathbb{R} \quad (41)$$

- **Ortogonalidade de autovetores:**

$$\langle v_i|v_j\rangle = 0 \quad \text{para } \lambda_i \neq \lambda_j \quad (42)$$

1.4.4 Espaços de Hilbert: Estrutura e Propriedades

Bases em dimensão finita: Em um espaço vetorial N-dimensional, qualquer vetor pode ser expandido em uma base:

$$|v_i\rangle = \sum_{n=1}^N v_n |e_n\rangle \quad (43)$$

Ortonormalidade: Uma base $\{|e_n\rangle\}$ é ortonormal se:

$$\langle e_m | e_n \rangle = \delta_{mn} \quad (44)$$

Produto escalar em bases: Em uma base ortonormal, o produto escalar torna-se:

$$\langle v_i | v_j \rangle = \sum_{n=1}^N v_{i,n}^* v_{j,n} \quad (45)$$

Condição de Hilbert em dimensão infinita: Em espaços de dimensão infinita, a condição para pertencer ao espaço de Hilbert é:

$$\langle v_i | v_i \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |v_{i,n}|^2 < \infty \quad (46)$$

Esta condição garante a completude do espaço e a existência de limites adequados.

Na formulação matemática da mecânica quântica proposta por Dirac e sistematizada por von Neumann, os estados físicos são representados como vetores de um espaço vetorial complexo dotado de estrutura geométrica e topológica bem definida. Esse espaço é um espaço de Hilbert, cuja definição completa exige as propriedades de completeza e separabilidade. Ambas desempenham papéis centrais para a consistência física e matemática do formalismo de bras e kets e da teoria espectral de observáveis.

Espaços de Hilbert

Um espaço de Hilbert \mathcal{H} é um espaço vetorial complexo munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$, que satisfaz linearidade no primeiro argumento, conjugação no segundo e positividade. Esse produto interno induz uma norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, de modo que \mathcal{H} se torna um espaço normado. A exigência adicional de que o espaço seja completo em relação a essa norma distingue os espaços de Hilbert dos espaços pré-Hilbert.

A ideia de completude garante que limites de sequências de estados, expansões em bases, desenvolvimentos de Fourier generalizados e procedimentos de aproximação conduzem sempre a estados que permanecem dentro do próprio espaço. Sem a propriedade de completude, o espaço de estados seria instável sob operações de limite, e ferramentas fundamentais, como a decomposição espectral de operadores auto-adjuntos, deixariam de ser garantidas. Assim, a completude assegura que operações matemáticas fundamentais à teoria resultem sempre em estados fisicamente válidos.

Completeza

Um espaço normado é dito completo quando toda sequência de Cauchy $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$ converge para um limite também pertencente ao espaço. Essa propriedade é essencial na mecânica quântica porque a teoria espectral de operadores auto-adjuntos, que fundamenta a interpretação dos observáveis, requer a existência de limites em norma e medidas espectrais bem definidas. A evolução temporal unitária, formalizada pelo teorema de Stone, também depende da completeza do espaço para garantir que o operador unitário $U(t) = e^{-iHt/\hbar}$ esteja corretamente definido em todo o domínio relevante. Além disso, a convergência de expansões de estados em bases ortonormais, como

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle,$$

depende diretamente da completeza do espaço, que garante a existência do limite em norma. Desse modo, a completude é indispensável para que o formalismo quântico seja matematicamente estável e operacionalmente consistente.

Separabilidade

O espaço de Hilbert utilizado na mecânica quântica deve ser também separável. Um espaço é dito separável quando admite um conjunto denso enumerável, ou, de forma equivalente, quando possui uma base ortonormal enumerável $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Isso significa que qualquer vetor do espaço pode ser aproximado arbitrariamente bem por combinações lineares finitas desses vetores. A separabilidade possui importância física imediata, pois qualquer experimento real acessa apenas um número contável de resultados distinguíveis, e a teoria deve refletir essa limitação fundamental da informação física. Ela também é essencial para o formalismo de Dirac, pois a representação de estados como séries de coeficientes, como em

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle,$$

pressupõe a existência de bases enumeráveis. Na ausência de separabilidade, esse tipo de expansão deixaria de ser possível e a formulação de bras e kets perderia coerência operacional.

A separabilidade garante ainda que a teoria espectral de observáveis não produza espectros com cardinalidade excessivamente grande, evitando objetos que não correspondem a nenhum sistema físico realizável. Ela impede o surgimento de operadores patológicos e assegura a aplicabilidade de teoremas estruturais fundamentais, como o teorema de Stone–von Neumann e a construção de representações via o formalismo de GNS. Em consequência, a separabilidade constitui uma condição estrutural essencial para que o espaço de estados represente fielmente a estrutura física dos sistemas quânticos.

A combinação das propriedades de completeza e separabilidade garante que o espaço de estados da mecânica quântica permita trabalhar com limites, séries e expansões convergentes; possua estrutura suficientemente regular para representar observáveis auto-adjuntos e sua dinâmica; reflita a natureza finita e contável da informação experimental; e seja compatível com a formulação de bras e kets e com a teoria espectral de von Neumann. Em síntese, um espaço de Hilbert completo e separável constitui o ambiente matemático natural em que o formalismo de Dirac–von Neumann opera de maneira rigorosa, consistente e fisicamente significativa.

1.5 Equação de Schrödinger e o formalismo de Dirac

A equação de Schrödinger é o ponto de partida para a descrição da evolução temporal de sistemas quânticos. Ela relaciona o estado do sistema, representado por uma função de onda $\psi(t)$, com o operador hamiltoniano \hat{H} que descreve sua energia total:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi. \quad (47)$$

No formalismo mais geral introduzido por Dirac, os estados são vetores $|\psi\rangle$ em um espaço vetorial abstrato (espaço de Hilbert), e os observáveis físicos são representados por operadores lineares. Essa linguagem é particularmente útil para descrever superposições, emaranhamento e medições.

No formalismo de Schrödinger, o estado quântico de um sistema é representado por uma função de onda $\psi(\mathbf{r}, t)$, que satisfaz a equação de Schrödinger dependente do tempo:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \hat{H}\psi(\mathbf{r}, t) \quad (48)$$

onde \hat{H} é o operador Hamiltoniano.

No formalismo de Dirac, os estados são representados por vetores em um espaço de Hilbert, denotados por $|\psi(t)\rangle$, e a evolução temporal é dada por

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle. \quad (49)$$

Referências

- D. Bohm, *Quantum Theory*, Dover books in science and mathematics (Dover Publications, 1989).
- C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë, *Quantum Mechanics, Volume I: Basic Concepts, Tools, and Applications*, 2nd ed. (Wiley-VCH, Weinheim, Germany, 2020) eBook ISBN: 978-3-527-82271-3.
- M. Horbatsch, *Quantum Mechanics using Maple* (Springer-Verlag, 1995) worksheets available online <https://www.yorku.ca/marko/>.
- A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell: (Second Edition)*, In a Nutshell (Princeton University Press, 2010).
- V. Mukhanov and S. Winitzki, *Introduction to Quantum Effects in Gravity* (Cambridge University Press, 2007) 284 pages. ISBN: 9780521868341.
- D. Tong, “Lectures on quantum field theory,” (2006), university of Cambridge. Permission granted to copy and distribute with attribution.