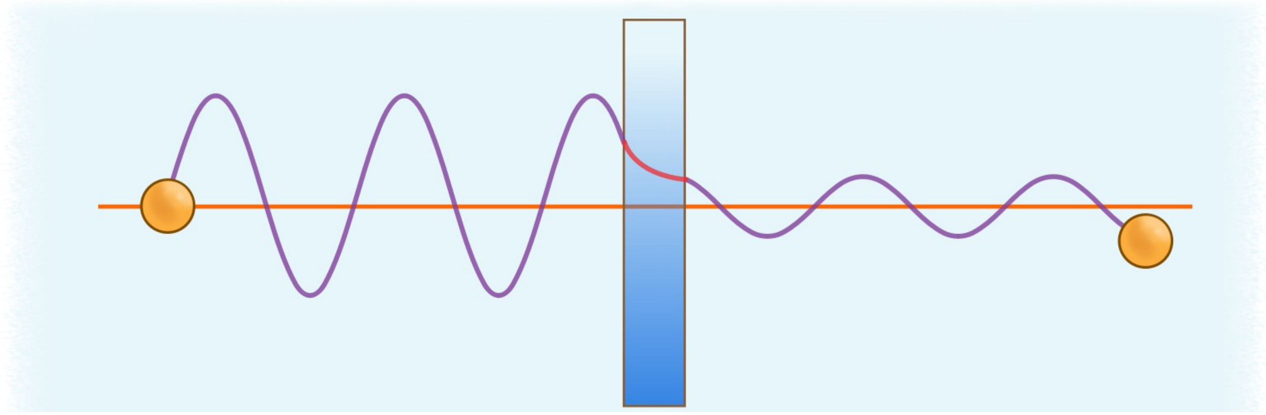
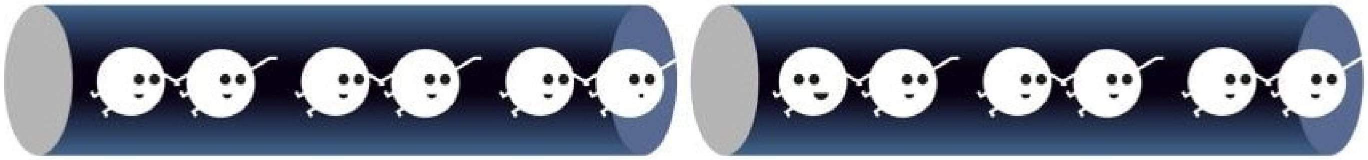
Minicurso – Introdução a Teoria Quântica de Campos

Aula 2 – Aplicações básicas de Mecânica Quântica





Francisco Bento Lustosa

Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu

Universidade Estadual do Ceará

Universidade Estadual do Ceará

CEARÁ GOVERNO DO ESTADO

CNPq

"E disseram uns aos outros: Vamos, edifiquemos para nós uma torre cujo topo alcance o céu; e façamos para nós um nome. E o Senhor disse: Vamos, desçamos e confundamos ali a sua linguagem, para que não entendam a fala uns dos outros."

Gênesis 11:3–7

Ehrenfest em casa em Leiden e Albert Einstein com Paul Ehrenfest, Jr. no colo (1920)

Na Conferencia de Solvay, de 1927, Paul Ehrenfest escreveu a citação biblíca acima no quadro durante uma das discussões, evidenciando o estado total de confusão entre os presentes.

"Eu acho que a física não explica nada. Eu acho que a física representa. A física é uma forma da gente representar... da mesma forma que um artista representa a natureza através de uma pintura, uma escultura... o físico vai olhar pra natureza, ele vai tentar representar os fenômenos. Representando... isso pode até virar uma descrição. Então "Ah, eu posso descrever.." Mas eu acho que explicar a natureza do ponto de vista da física quando se diz isso me dói um pouquinho... porque eu acho muito pretensioso que a gente explique a natureza. A natureza pode não ser nada disso que a gente pensa que é. A gente simplesmente dá representações."

Entrevista com Helayel-Neto (CBPF)

Na última aula...

Derivadas da Hamiltoniana: Calculando as derivadas parciais:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}(pv - L) = p\frac{\partial v}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial v}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q}$$
$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}(pv - L) = v + p\frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial v}{\partial p} = v$$

Equações de Hamilton: Obtemos assim as famosas equações canônicas:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \text{e} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

Na última aula...

$$[\hat{q}(t), \hat{p}(t)] = i\hbar$$

Equações do movimento: As equações de Heisenberg descrevem a evolução temporal dos operadores:

$$\frac{d\hat{q}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{q}]; \quad \frac{d\hat{p}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{p}]$$

Limite clássico: Estas equações recuperam a mecânica clássica no limite $\hbar \to 0$:

$$\frac{d\hat{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} + O(\hbar); \quad \frac{d\hat{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} + O(\hbar)$$

Na última aula...

A notação de Dirac proporciona uma linguagem poderosa e elegante para descrever a estrutura matemática da mecânica quântica.

- **Espaços de dimensão finita:** Compostos por uma coleção discreta de componentes, representando sistemas com número finito de estados.
- **Espaços de dimensão infinita:** Possuem infinitas componentes. O exemplo fundamental é o espaço L^2 das funções de onda:
$$L^2 = \left\{ \psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \,\middle|\, \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(q)|^2 dq < \infty \right\}$$
- **Interpretação de funções como vetores:** Uma função $\psi(q) \in L^2$ pode ser vista como um vetor com infinitas componentes $\psi_q = \psi(q)$.
- **Espaço de estados:** Para uma partícula pontual, o espaço de estados é exatamente L^2 quando $q = x$ representa a posição.
- **Generalização para TQC:** Em Teoria Quântica de Campos, as coordenadas x são substituídas por configurações de campos $\phi(x)$ e os estados tornam-se **funcionais** $\Psi[\phi(x)]$.

Hoje...

- Terminar a notação de Dirac
- Definir a evolução para estados gerais
- Derivar a equação de Schrodinger?
- Barreira e Poço de Potencial
- Introdução ao Oscilador Harmônico Quântico

Um operador $A : V \to V$ satisfaz:

$$A(\alpha|v\rangle + \beta|w\rangle) = \alpha A|v\rangle + \beta A|w\rangle$$

$f : V \to \mathbb{C}$ são funcionais que atuam em vetores $|v\rangle$

produzindo números complexos $\langle f|v\rangle$

Se $|v\rangle$ é autovetor de A, então $A|v\rangle = \lambda|v\rangle$

$$\langle v|A^\dagger|w\rangle = \langle w|A|v\rangle^*$$

$$(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$(\lambda A)^\dagger = \lambda^* A^\dagger$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

Tipos fundamentais de operadores:

- **Hermitiano:** $A = A^\dagger$ (observáveis físicos)
- **Anti-Hermitiano:** $A = -A^\dagger$
- **Unitário:** $AA^\dagger = A^\dagger A = I$ (evoluções temporais, rotações)

Hoje...

Propriedades espectrais de operadores Hermitianos:

- **Resultados de medida:** O resultado de qualquer medida é sempre um autovalor do operador correspondente
- **Observáveis:** Todos os observáveis físicos são representados por operadores Hermitianos
- **Autovalores reais:**

$$\text{Se } A|v_i\rangle = \lambda_i|v_i\rangle \text{ e } A = A^\dagger, \text{ então } \lambda_i \in \mathbb{R}$$

- **Ortogonalidade de autovetores:**

$$\langle v_i|v_j\rangle = 0 \quad \text{para } \lambda_i \neq \lambda_j$$

Espaços de Hilbert: Estrutura e Propriedades

$$|v_i\rangle = \sum_{n=1}^{N} v_n|e_n\rangle \qquad \langle e_m|e_n\rangle = \delta_{mn} \qquad \langle v_i|v_j\rangle = \sum_{n=1}^{N} v_{i,n}^* v_{j,n} = \sum_{n=1}^{\infty} |v_{i,n}|^2$$

Barreira de Potencial

$$\psi 1 := x \rightarrow e^{I\,k1\,x} + B\,e^{-I\,k1\,x}$$

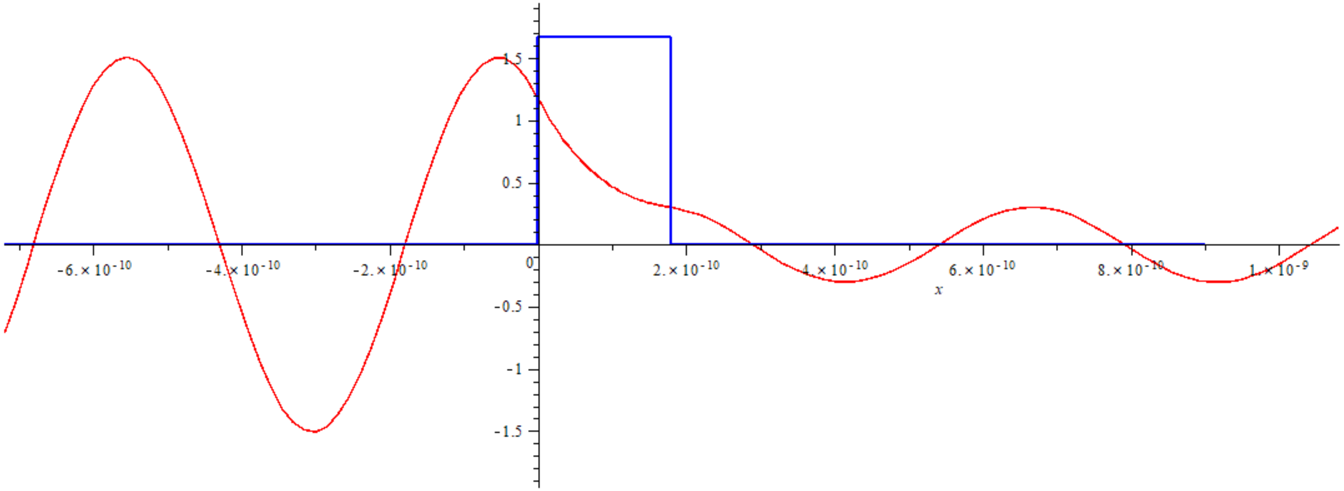
$$\psi 2 := x \rightarrow F\,e^{\kappa 2\,x} + G\,e^{-\kappa 2\,x}$$

$$\psi 3 := x \rightarrow C\,e^{I\,k1\,x}$$

$$\Psi 1 := (x, t) \rightarrow \psi 1(x)\,e^{-I\,w\,t}$$

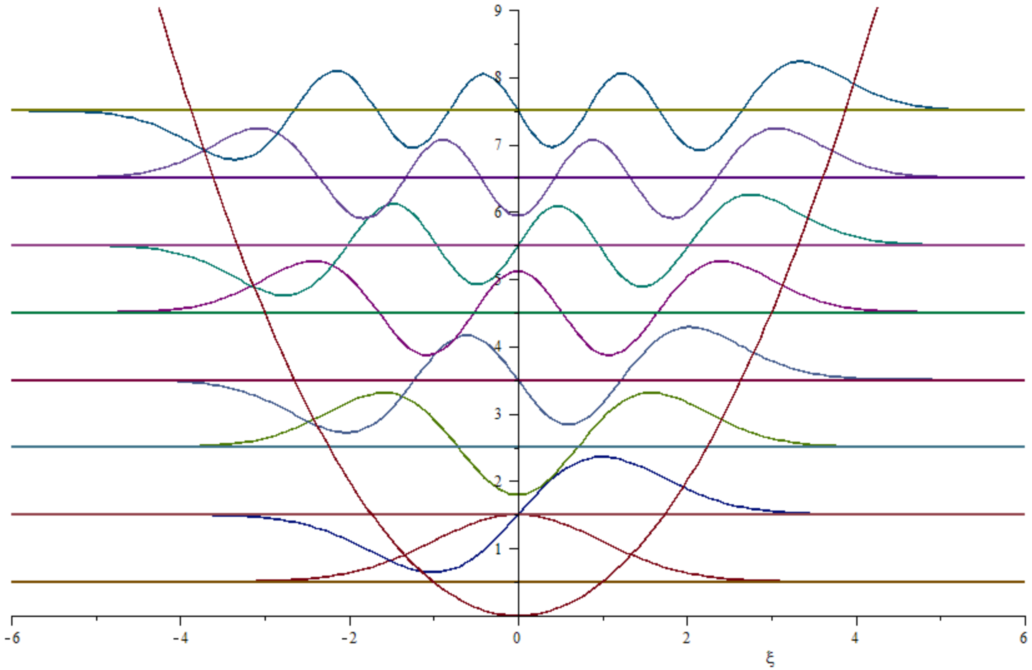
$$\Psi 2 := (x, t) \rightarrow \psi 2(x)\,e^{-I\,w\,t}$$

$$\Psi 3 := (x, t) \rightarrow \psi 3(x)\,e^{-I\,w\,t}$$



Physics with Maple – 14.4

Oscilador Harmônico



$$\psi := (n, \xi) \to \frac{e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\,\mathrm{HermiteH}(n, \xi)}{\sqrt{2^n\, n!}}$$

$$e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

$$\sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\, \xi$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{8}\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\, \xi^2 - \frac{1}{4}\sqrt{8}\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

$$\frac{1}{6}\sqrt{48}\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\, \xi^3 - \frac{1}{4}\sqrt{48}\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\, \xi$$

$$\frac{1}{24}\sqrt{384}\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\, \xi^4 - \frac{1}{8}\sqrt{384}\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\, \xi^2 + \frac{1}{32}\sqrt{384}\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

$$\frac{1}{120}\sqrt{3840}\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\, \xi^5 - \frac{1}{24}\sqrt{3840}\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\, \xi^3 + \frac{1}{32}\sqrt{3840}\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\, \xi$$

$$\frac{1}{720}\sqrt{46080}\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\, \xi^6 - \frac{1}{96}\sqrt{46080}\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\, \xi^4 + \frac{1}{64}\sqrt{46080}\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\, \xi^2 - \frac{1}{384}\sqrt{46080}\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

Physics with Maple – 15.4

Mecânica quântica: uma revolução em andamento

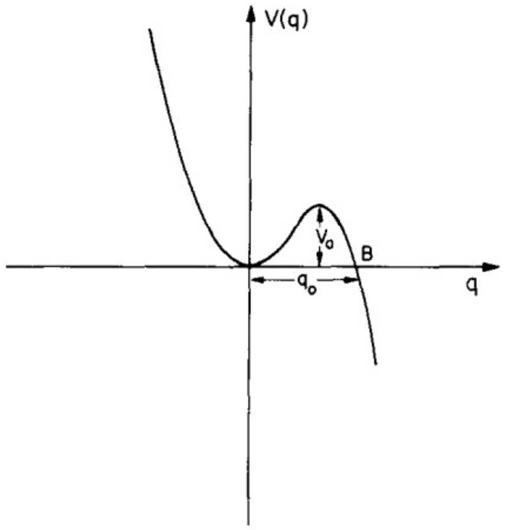
Nobel 2025 – Tunelamento macroscópico: “FOR THE DISCOVERY OF MACROSCOPIC QUANTUM MECHANICAL TUNNELLING AND ENERGY QUANTISATION IN AN ELECTRIC CIRCUIT”

- **A. O. Caldeira**, A. J. Leggett, “Influence of Dissipation on Quantum Tunneling in Macroscopic Systems”, Phys Rev. Lett, 46, 211 (1981).
- **A. O. Caldeira**, A. J. Leggett, “Quantum Tunneling in a Dissipative System”, Annals Phys., 149 (1983).
- J. M. Martinis, M. H. Devoret, J. Clarke, “Energy-Level Quantization in the ZeroVoltage State of a Current-Biased Josephson Junction”, Phys. Rev. Lett. 55, 1543 (1985).

$$L_E(q, \dot{q}: \{x_\alpha, \dot{x}_\alpha\}) \equiv \tfrac{1}{2}M\dot{q}^2 + V(q) + \tfrac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha(\dot{x}_\alpha^2 + \omega_\alpha^2 x_\alpha^2)$$
$$+ q\sum_\alpha C_\alpha x_\alpha + \tfrac{1}{2}M|\Delta\omega^2|q^2.$$

$$K(q_i, q_f: T) = \int \prod_\alpha dx_{\alpha i} \int_{q(0)=q_i}^{q(T)=q_f} \mathscr{D}q(\tau) \prod_\alpha \int_{x_\alpha(0)=x_{\alpha i}}^{x_\alpha(T)=x_{\alpha i}} \mathscr{D}x_\alpha(\tau)$$
$$\times \exp\left(-\int_0^T L_E(q, \dot{q}: \{x_\alpha, \dot{x}_\alpha\})\, d\tau/\hbar\right),$$

CALDEIRA AND LEGGETT



Obrigado!

Amir Caldeira (UNICAMP) Philip Stamp (UBC) Eu! (UECE)

Dúvidas?
chico.lustosa@uece.br
Instagram: @profchicolustosa
X/Twitter: @LustosaChico