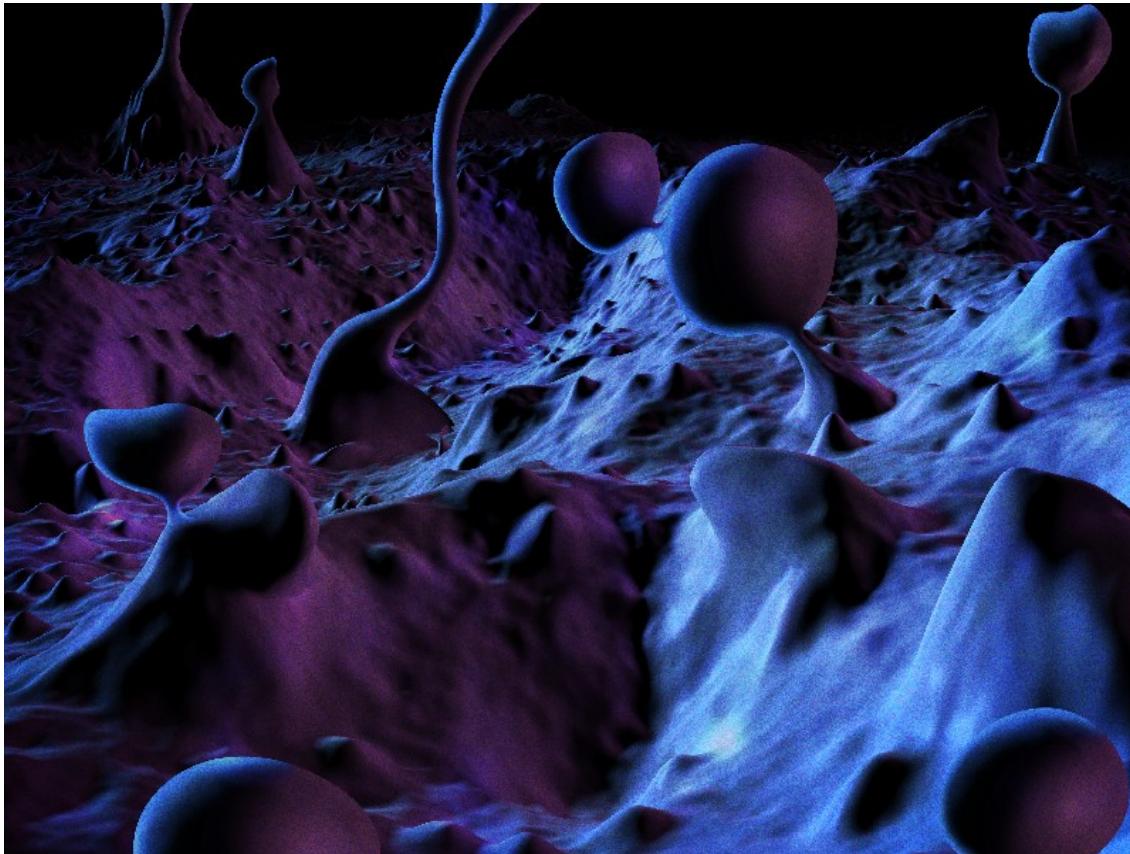
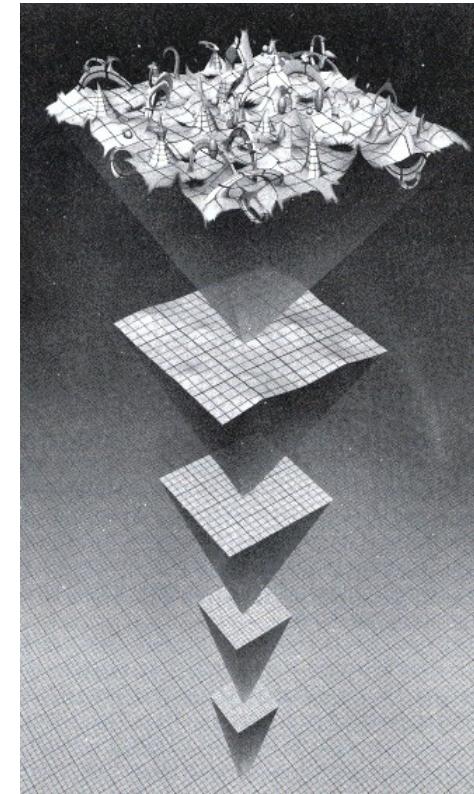


# Aula 4 – Introdução ao Vácuo Quântico



"Quantum Foam" Scrubs Away Gigantic Cosmic Energy (<https://physics.aps.org/articles/v12/105>)



**Francisco Bento Lustosa**  
Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu  
Universidade Estadual do Ceará

# Recapitulando...

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left[ \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}, t) \right] \Psi(\mathbf{r}, t)$$

Além da evolução de estados quânticos ser descrita pela equação de Schrödinger (ou sua forma equivalente nas equações de Heisenberg), a interpretação de Copenhague (referida apenas como “Mecânica Quântica” de forma geral) é baseada nos seguintes postulados:

- Todo sistema físico é descrito por um vetor (ket) em um espaço de Hilbert;
- As grandezas físicas observáveis são representadas por operadores Hermitianos (auto-adjuntos\*) nesse espaço de estados;
- Os únicos resultados possíveis de uma medida de um determinado observável são os autovalores associados ao seu operador;
- A probabilidade de encontrar um ou outro valor é determinada pelo módulo quadrado da função de onda naquele intervalo;
- Após uma medida, o estado quântico colapsa para o autovetor correspondente ao autovalor observado

# Recapitulando...

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + \left(\frac{m\omega^2x^2}{2} - E\right)\psi = 0$$

$$E = (2n + 1) \frac{\hbar\omega}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$$

$$\psi_n(x) = \exp \left[ -\left( \omega \frac{m}{\hbar} \right) \left( \frac{x^2}{2} \right) \right] h_n \left( \sqrt{\frac{\omega m}{\hbar}} x \right) \frac{\sqrt[4]{\omega m / \hbar}}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}}$$

$$\psi_0 \sim e^{-y^2/2}$$

$$\psi_1 \sim 2ye^{-y^2/2}$$

$$\psi_2 \sim (2y^2 - 1)e^{-y^2/2}$$

The functions  $e^{-y^2/2}h_n(y)$  are eigenfunctions of the Hamiltonian, belonging to an energy  $E = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ . The wave function therefore becomes

$$\psi(y, t) = \exp \left( -\frac{i\omega t}{2} \right) \exp \left[ -\left( \lambda^2 + \frac{y^2}{2} \right) \right] \sum_{n=0}^{\infty} h_n(y) \frac{(\lambda e^{-i\omega t})^n}{n!} \quad (50)$$

We now rewrite the above function, obtaining (with the aid of the definition of the generating function)

$$\psi(y, t) = \exp \left( -\frac{i\omega t}{2} \right) \exp \left[ -\left( \lambda^2 + \frac{y^2}{2} \right) \right] \exp(-\lambda^2 e^{-2i\omega t} + 2\lambda e^{-i\omega t} y) \quad (51a)$$

Writing  $\lambda = y_0/2$ , we obtain

$$\psi(y, t) = \exp \left( -\frac{i\omega t}{2} \right) \exp \left\{ -\left[ \frac{y^2}{2} + \frac{y_0^2}{4} (1 + e^{-2i\omega t}) - 2y \frac{y_0}{2} e^{-i\omega t} \right] \right\} \quad (51b)$$

$$= \exp \left( -\frac{i\omega t}{2} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ y^2 - 2yy_0 \cos \omega t + \frac{y_0^2}{2} (1 + \cos 2\omega t) \right] \right\} \\ \exp \left[ \frac{i}{2} \left( y_0^2 \frac{\sin 2\omega t}{2} - 2yy_0 \sin \omega t \right) \right] \quad (51c)$$

The probability density is

$$P = \psi^* \psi = \exp [-(y^2 - 2yy_0 \cos \omega t + \frac{y_0^2}{2} \cos^2 \omega t)] \\ = \exp [-(y - y_0 \cos \omega t)^2] \quad (52)$$

Pacotes de onda podem ser construídos a partir de muitos osciladores harmônicos superpostos... e podem representar estados de partículas...

# Pacotes de onda

```

> En := ks →  $\frac{ks^2}{2}$ ;
En := ks →  $\frac{1}{2} ks^2$ 

> phi_R := (x, t, ks) → exp(I·ks·x) · exp(-I·En(ks)·t);
phi_R := (x, t, ks) →  $e^{Iksx} e^{-IEn(ks)t}$ 

> phi_L := (x, t, ks) → exp(-I·ks·x) · exp(-I·En(ks)·t);
phi_L := (x, t, ks) →  $e^{-Iksx} e^{-IEn(ks)t}$ 

> wt := (p, x0, p0, w0) →  $\frac{\exp\left(-\frac{(p-p0)^2}{4w0^2} - Ipx0\right)}{\sqrt{\sqrt{\pi} w0}}$ ;
wt := (p, x0, p0, w0) →  $\frac{e^{-\frac{1}{4} \frac{(p-p0)^2}{w0^2} - Ipx0}}{\sqrt{\sqrt{\pi} w0}}$ 

> packetR := (x, t, x0, p0, w0) → int(wt(p, x0, p0, w0) · phi_R(x, t, p), p = -L .. L);
packetR := (x, t, x0, p0, w0) →  $\int_{-L}^L wt(p, x0, p0, w0) phi_R(x, t, p) dp$ 

> assume(L > 0); assume(t > 0); assume(w0 > 0);

```

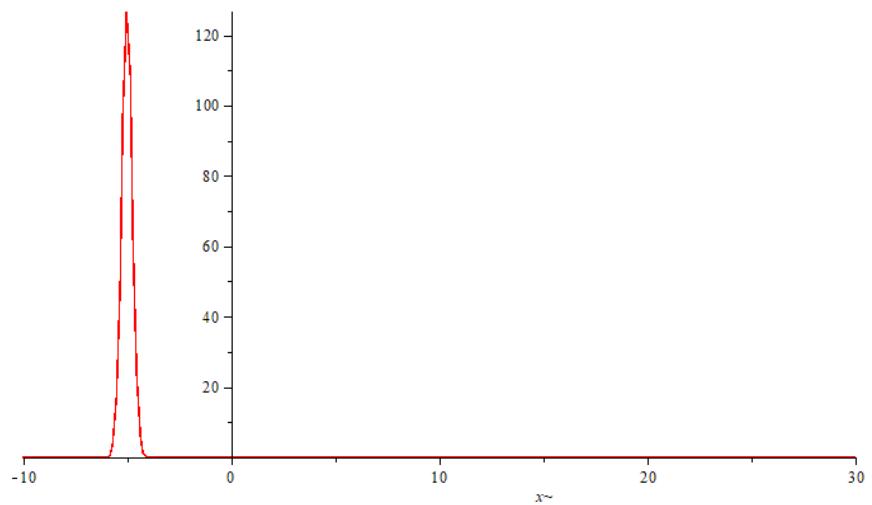
$$\begin{aligned}
> pack := unapply\left(\frac{res}{\left(\frac{1}{\pi^4} \cdot w0^2\right)}, x, t, x0, p0, w0\right); \\
pack := (x\sim, t\sim, x0\sim, p0\sim, w0\sim) \rightarrow \frac{\frac{1}{4} \frac{p0\sim^2}{w0\sim^2} \frac{4 w0\sim^4 \left(\frac{1}{2} \frac{p0\sim}{w0\sim} + 1(x0\sim - x\sim)\right)^2}{e^{-8 It\sim w0\sim^4 + 1}}}{\sqrt{-8 It\sim w0\sim^4 + 1}} w0\sim^{3/2} \pi^{1/4} \quad (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> pack(x, t, 0, 2, 1); \\
&\frac{4 e^{-1} e^{\frac{4 (1 - Ix\sim)^2}{-8 It\sim + 1}} \pi^{1/4}}{\sqrt{-8 It\sim + 1}} \quad (29)
\end{aligned}$$

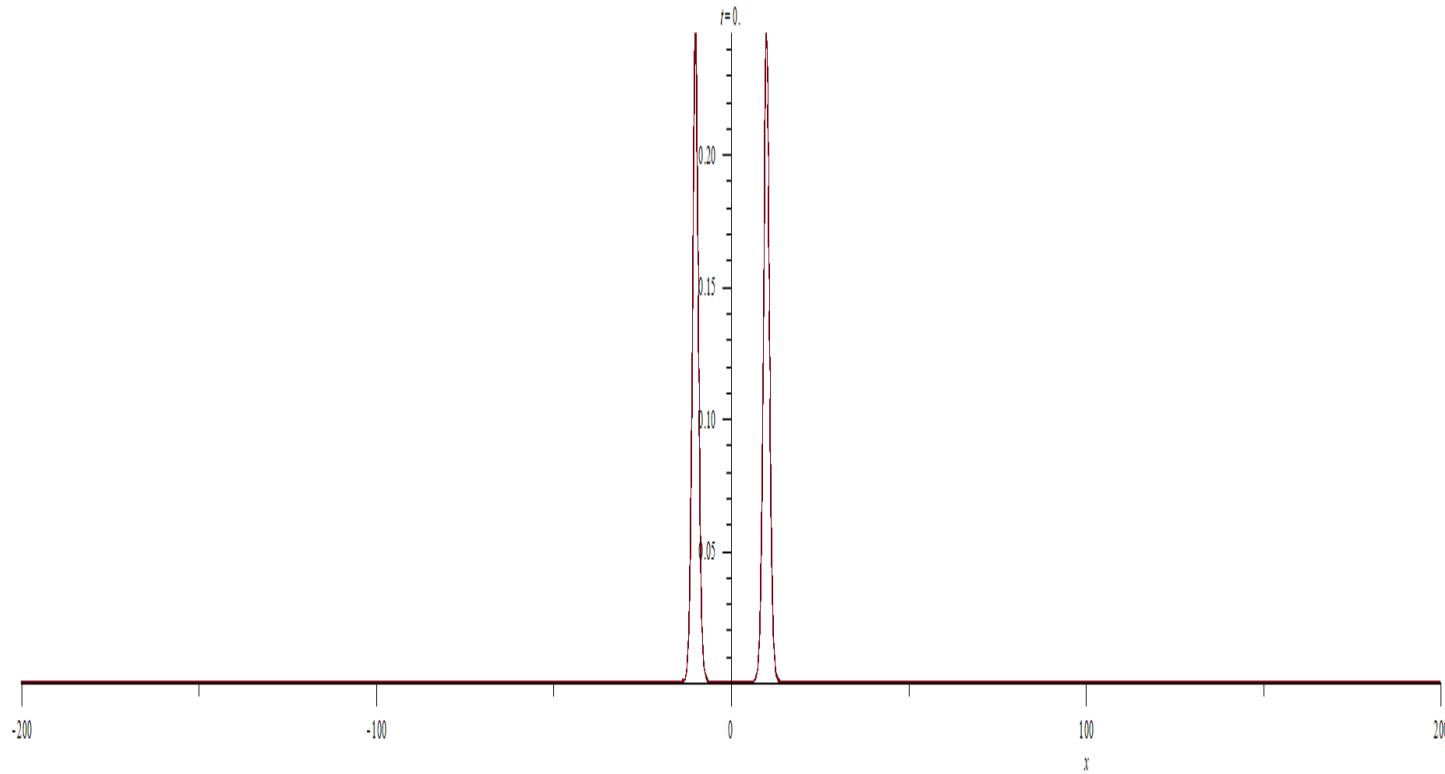
```

> with(plots):
> animate(abs(evalf(pack(x, t, -5, 1, 1)))^2, x = -10 .. 50, t = 0 .. 2·Pi, numpoints = 250, frames = 500);

```

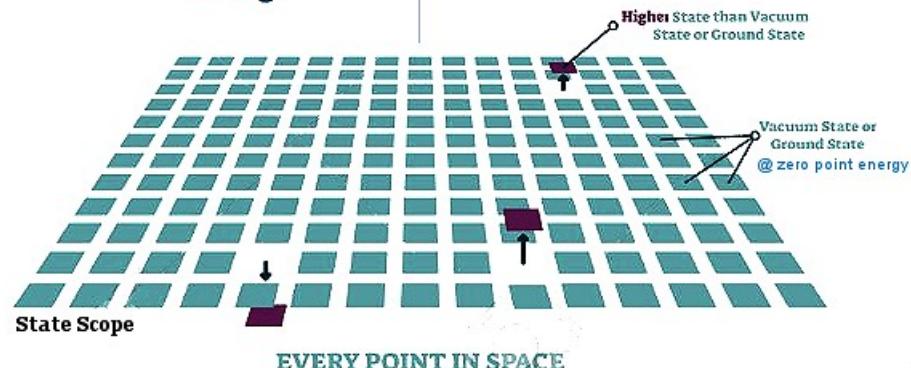
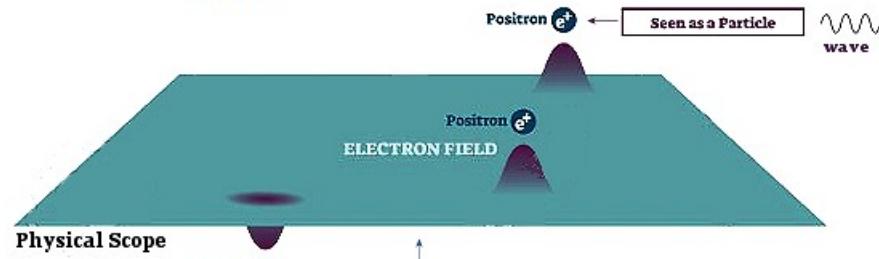
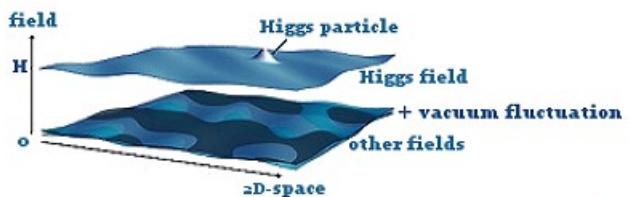


# Pacotes de onda



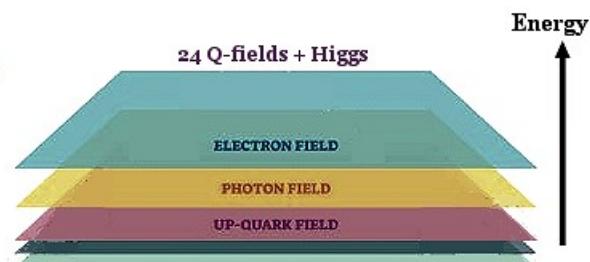
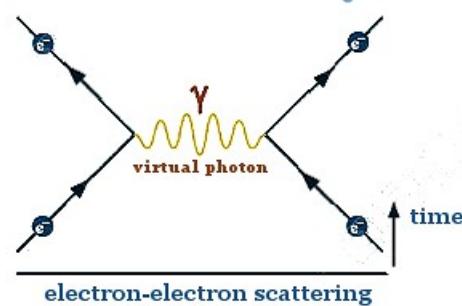
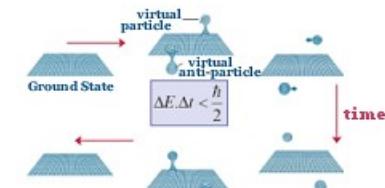
Dois pacotes de onda construídos a partir de estados de campo escalar superpostos

# QUANTUM FIELDS



EVERY POINT IN SPACE

2-D Quantum Fields



# Efeitos observáveis do vácuo quântico

- A emissão espontânea no hidrogênio é a transição  $2p \rightarrow 1s$  com produção de um fóton. Explicada apenas pela interação de elétrons com flutuações do vácuo do campo EM.
- O deslocamento de Lamb: pequena diferença de energia entre estados  $2p$  e  $2s$ . Ocorre porque as nuvens eletrônicas têm geometrias diferentes e interagem diferentemente com as flutuações do vácuo. Diferença medida:  $\approx 1057$  MHz.
- Efeito Casimir: força atrativa entre placas condutoras paralelas descarregadas. Força decai com a distância  $L$  como  $F \sim L^{-4}$ . Explicado pela mudança na energia do ponto zero do campo EM devido aos condutores.

# Efeitos de criação de partículas a partir do vácuo

- Efeito Schwinger: Este é um fenômeno puramente quântico que prevê que um campo elétrico suficientemente forte pode realizar trabalho sobre o vácuo, fornecendo a energia necessária para materializar pares de partículas e antipartículas. É uma previsão fundamental da Eletrodinâmica Quântica.
- Efeito Unruh: Este efeito estabelece uma ponte profunda entre a Relatividade Geral e a Mecânica Quântica. Ele mostra que o conceito de "partícula" é relativo e depende do estado de movimento do observador. Um observador inercial vê o vácuo, enquanto um observador acelerado vê um plasma de partículas quentes. A temperatura associada a esse fenômeno (Temperatura de Unruh) é proporcional à aceleração.
- Efeito Hawking: Este é talvez o efeito mais famoso da gravidade quântica. Hawking propôs que pares de partículas virtuais surgem perto do horizonte de eventos de um buraco negro. Ocasionalmente, uma parte do par cai no buraco negro, enquanto a outra escapa para o infinito, manifestando-se como uma radiação térmica. Esse processo faz com que o buraco negro perca massa lentamente ao longo do tempo.

# O problema da constante cosmológica

- Tudo tem energia do vácuo: De acordo com a teoria quântica de campos, cada campo (eletromagnético, elétron, quark, etc.) tem suas próprias flutuações de ponto zero e contribui para a densidade de energia do vácuo,  $\rho_{vac}$ .
- A energia do vácuo gravita: Um princípio fundamental da Relatividade Geral (teoria da gravidade de Einstein) é que todas as formas de energia curvam o espaço-tempo e geram gravidade. Não há exceção para a energia do vácuo.
- A constante cosmológica é energia do vácuo: Nas equações da Relatividade Geral, a constante cosmológica ( $\Lambda$ ) aparece como um termo constante. Podemos mover esse termo para o outro lado da equação e interpretá-lo como o tensor energia-momento do vácuo:  $T_{vac} = -(\Lambda c^4)/(8\pi G) g$ . Isso significa que a constante cosmológica é uma medida direta da densidade de energia do vácuo:  $\rho_{vac} = (\Lambda c^2)/(8\pi G)$ .
- A discrepância catastrófica: Conforme calculamos com o corte de Planck, uma estimativa ingênuia da teoria quântica de campos dá  $\rho_{vac} \sim 10^{112} \text{ eV/cm}^3$ . No entanto, observações da expansão acelerada do universo nos dizem que  $\rho_{obs} \sim 10^{-10} \text{ eV/cm}^3$ .

# O problema da constante cosmológica

“A história do problema da constante cosmológica é longa e rica [5]. Suas premissas estavam, de fato, presentes imediatamente após o nascimento da teoria quântica de campos. De fato, a partir do princípio da incerteza de Heisenberg, sabemos que a energia do estado fundamental do oscilador da mecânica quântica não pode ser zero porque as energias potencial e cinética não podem se anular simultaneamente. Uma vez que um campo quântico (livre) pode ser visto como uma coleção infinita de osciladores harmônicos, segue-se imediatamente que sua energia do estado fundamental deve ser infinita. É claro, isso ainda não é o problema da constante cosmológica porque a gravidade não entra em cena. Mas, claramente, potencialmente, um problema muito severo já está presente.”

“Tudo que você queria saber sobre o problema da constante cosmológica (mas tinha medo de perguntar)” - <https://arxiv.org/pdf/1205.3365>

# O problema da constante cosmológica

“A infinidade mencionada acima é a primeira que se encontra na teoria quântica de campos [16-22]. No entanto, a presença dessa infinidade não impediu os pais fundadores da teoria quântica de campos de desenvolvê-la, pois, na ausência de gravidade (uma premissa de trabalho da teoria quântica de campos justificada pela fraqueza da gravidade), apenas diferenças em energias são observáveis. Portanto, neste contexto, essa infinidade pode ser simplesmente ignorada e o restante do formalismo pode ser trabalhado sem qualquer problema. Como é bem conhecido, outros tipos de infinidades aparecem e, desta vez, não há como contorná-las. Tratá-las e domá-las é o objetivo da renormalização. A impressionante concordância entre medições de alta precisão em aceleradores e as previsões da teoria quântica de campos na presença de correções radiativas é a prova de que a renormalização é capaz de regular corretamente essas infinidades.”

“Tudo que você queria saber sobre o problema da constante cosmológica (mas tinha medo de perguntar)” - <https://arxiv.org/pdf/1205.3365>

# O problema da constante cosmológica

“Portanto, vemos que esses dois tipos de infinidades são tratados de maneira muito diferente. O problema da energia do ponto zero é simplesmente evitado, enquanto o problema das correções radiativas é direta e explicitamente abordado. Claramente, não se pode deixar de pensar que o primeiro problema está de fato sendo varrido para debaixo do tapete. E, de fato, assim que a gravidade é incluída, ela contra-ataca fortemente.

Neste ponto, vale notar o seguinte. Não se deve ter a impressão de que a energia do ponto zero não pode ser renormalizada. Na verdade, como será discutido nesta revisão, ela pode ser tornada perfeitamente finita. **No entanto, este valor finito e renormalizado da energia do ponto zero parece ser grande demais para ser compatível com as observações.** Novamente, isso é muito diferente do caso usual da teoria quântica de campos, onde a parte finita extraída de uma expressão divergente sempre leva a uma boa concordância com os experimentos. À primeira vista, o problema da constante cosmológica não é, portanto, a presença de uma nova infinidade nem nossa incapacidade de regularizá-la, mas sim a aparente falha do esquema de renormalização em produzir, em nível quantitativo, uma energia do vácuo finita compatível com os dados observacionais.”

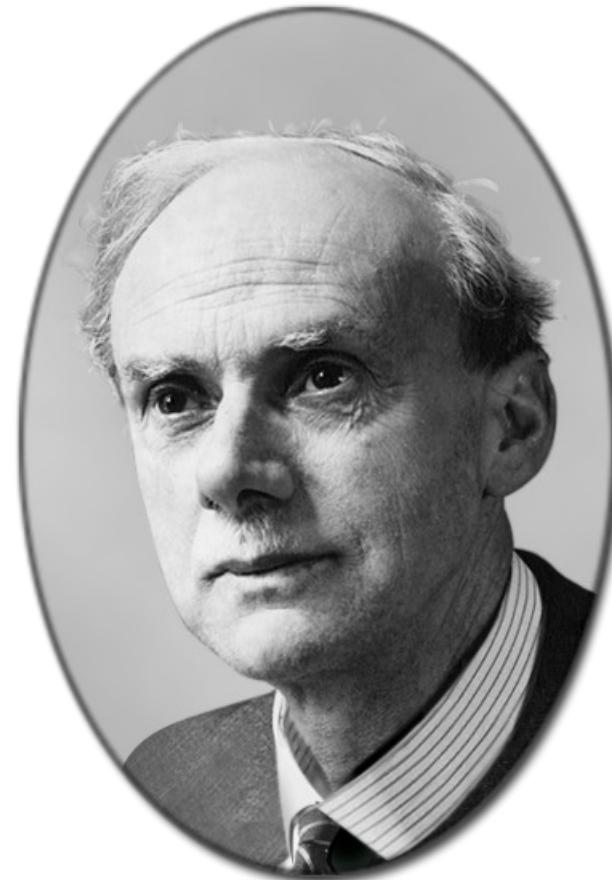
“Tudo que você queria saber sobre o problema da constante cosmológica (mas tinha medo de perguntar)” - <https://arxiv.org/pdf/1205.3365>

# Introdução à equação de Dirac

*The Quantum Theory of the Electron.*

By P. A. M. DIRAC, St. John's College, Cambridge.

(Communicated by R. H. Fowler, F.R.S.—Received January 2, 1928.)



# Introdução à equação de Dirac

## § I. Tratamentos Relativísticos Anteriores

O Hamiltoniano relativístico, de acordo com a teoria clássica, para um eletrão pontual movendo-se num campo eletromagnético arbitrário com potencial escalar  $A_0$  e potencial vetorial  $\mathbf{A}$  é

$$F \equiv \left( \frac{W}{c} + \frac{e}{c} A_0 \right)^2 + \left( \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + m^2 c^2,$$

onde  $\mathbf{p}$  é o vetor momento. Foi sugerido por Klein e Gordon que o operador da equação de onda da teoria quântica deveria ser obtido a partir deste  $F$  pelo mesmo procedimento usado na teoria não relativística, nomeadamente, colocando

$$\begin{aligned} W &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \\ p_r &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_r}, \quad r = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

nele. Isto fornece a equação de onda

$$F\psi \equiv \left[ \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{e}{c} A_0 \right)^2 + \sum_r \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_r} + \frac{e}{c} A_r \right)^2 + m^2 c^2 \right] \psi = 0, \quad (1)$$

sendo a função de onda  $\psi$  uma função de  $x_1, x_2, x_3, t$ . Isto dá origem a duas dificuldades.

A primeira diz respeito à interpretação física de  $\psi$ . Gordon, e também independentemente Klein, a partir de considerações sobre os teoremas de conservação, fazem a suposição de que se  $\psi_m, \psi_n$  são duas soluções

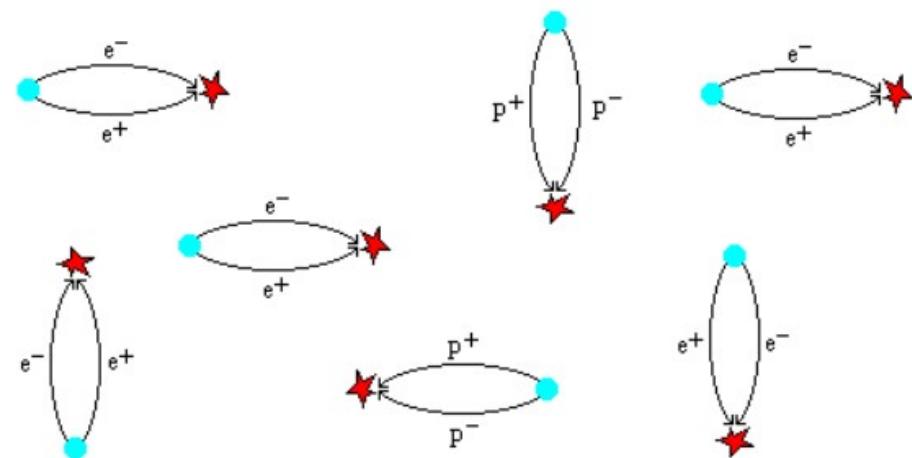
# Introdução à equação de Dirac

Se considerarmos, para sermos definidos, o caso limite de grandes números quânticos, descobriríamos que algumas das soluções da equação de onda são pacotes de onda que se movem da maneira como uma partícula de carga  $-e$  se moveria na teoria clássica, enquanto outras são pacotes de onda que se movem da maneira como uma partícula de carga  $e$  se moveria classicamente. Para esta segunda classe de soluções,  $W$  tem um valor negativo.

Na teoria clássica, contorna-se a dificuldade excluindo arbitrariamente aquelas soluções que têm um  $W$  negativo. Isso não se pode fazer na teoria quântica, pois, em geral, uma perturbação causará transições de estados com  $W$  positivo para estados com  $W$  negativo.

Tal transição apareceria experimentalmente como o elétron mudando subitamente sua carga de  $-e$  para  $e$ , um fenômeno que não foi observado.

A verdadeira equação de onda relativística deve, portanto, ser tal que as suas soluções se dividam em dois conjuntos que não se combinam, referindo-se respectivamente à carga  $-e$  e à carga  $e$ .



# Ao trabalho!

