

NOTAS DE AULA: Minicurso de Introdução à Teoria Quântica de Campos

Introdução

- A Teoria Quântica de Campos surge da "fusão" entre os conceitos da Mecânica Quântica e da Relatividade Especial.
- Os pilares fundamentais de qualquer T.Q.C. são o princípio de superposição dos estados quânticos e o de localidade (+ causalidade*).
- Os observáveis da teoria serão dados por valores esperados de operadores "agindo" sobre os campos.
- Campos, no sentido formal, são distribuições que tomam valores num espaço de operadores definidas num domínio com um espaço de Hilbert.
- Sendo $\Pi(x)$ o momento canonicamente conjugado ao campo $\phi(x)$, as relações de comutação se tornam
$$[\phi(x), \Pi(x')]_{x^0=x'^0} = i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') ; \hbar = 1$$
- No cálculo de amplitudes de Transições entre estados do campo, são encontradas divergências

- Dyson, Feynman, Salam, Schwinger, Tomonaga, Wick...
 - * "Selected Papers on Quantum Electrodynamics", J. Schwinger
 - * "Richard Feynman e a QED", V. Pleitez
(Rev. Bras. de Ensino de Fís. 40(4) 2018)
- ~ Métodos baseados em teorias de Perturbação (acoplamento fraco) foram usados para renormalizar e regularizar essas divergências
- Problemas com interações fortes e fracas...
- Anos 60/70: desenvolvimento das Teorias de calibre; Teoria eletrofraca resolve a renormalização das interações fracas e a QCD (Cromodinâmica quântica) descreve de maneira consistente (mas separada) as interações fortes.
- A consistente previsão e observação de novas partículas, em especial hádrons (combinações de quarks), corroborou e fundamentou a ampla aceitação das Teorias Quânticas de Campo como a mais precisa descrição do mundo subatômico

1.1 Dos Campos às Partículas

Física Clássica: Campos são gerados por fontes...
essas fontes são "cargas" associadas às simetrias dos campos

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad \dots \text{mas o que acontece quando } r \rightarrow \hbar?$$

Mecânica Quântica: Todo sistema físico tem uma "função de onda" associada à ele que torna certas quantidades incertas quando $r \rightarrow \hbar$

O comprimento de onda de um elétron é dado por $\lambda_c = \hbar/m_e c \approx 2.4 \times 10^{-12} \text{ m}$ essa é a incerteza mínima na localização de um elétron...



$$\Rightarrow \Delta E = \frac{\hbar c}{\lambda_c} \sim 0.5 \text{ MeV}$$

Para $r < \lambda_c$, Tentativas de interação com o elétron levam à criação de Partículas... como?!

1.2: Revisão - Mecânica Clássica e Formalismo Hamiltoniano

Princípio de Mínima ação;

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t) \dots) dt; \quad \dot{q}(t) = \frac{dq}{dt}$$

$$\delta S = 0 \rightarrow q(t)$$

Ex: Para o oscilador harmônico $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} (\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)$

$$\delta S[q, \delta q] = S[q + \delta q] - S[q]$$

~~Como δq é uma perturbação em torno da trajetória de mínima ação $q(t)$, δS não dependerá de~~

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}(t) \right] dt + O(\delta q^2)$$

usando $\int u dv = uv - \int v du$, onde $u = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, $v = \delta q(t)$

$$\delta S = \delta q(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \delta q(t) dt + O(\delta q^2)$$

Mas $\delta q(t_1, t_2) = 0$ e δS não pode depender de termos de 1ª ordem em $\delta q(t)$

$$\text{Se } L = \frac{1}{2} (\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) \Rightarrow \ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

Uma solução geral é dada por $q(t) = A \sin[\omega(t-t_1)] + B \cos[\omega(t-t_1)]$

$$q(t_1) = q_1 \Rightarrow B = q_1; \quad q(t_2) = q_2 \Rightarrow A = \frac{q_2 - q_1 \cos[\omega(t_2-t_1)]}{\sin[\omega(t_2-t_1)]}$$

Como $\frac{\delta S}{\delta q(t)} = 0$, Para avaliar a derivada funcional

de segunda ordem Precisariamos reescrever

$$\ddot{q}(t_1) + \omega^2 q(t_1) = \int [\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t)] \delta(t-t_1) dt; \quad \text{onde } \delta(t-t_0)[f] \equiv f(t_0)$$

Para uma expressão $\int q(t)f(t)dt$, $\frac{\delta}{\delta q(t_2)} = f(t_2)$,

$$\ddot{q}(t_1) + \omega^2 q(t_1) = \int [\delta''(t-t_1) + \omega^2 \delta(t-t_1)] q(t) dt$$

Para um campo em 3D: $S[\phi] = \frac{1}{2} \int d^3x dt (\nabla \phi)^2$

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x,t)} = -\nabla^2 \phi(x,t) = -\Delta \phi(x,t)$$

$$* \text{ USAR } \nabla \cdot (\delta \phi \nabla \phi) = \nabla \delta \phi \cdot \nabla \phi + \delta \phi \nabla^2 \phi$$

E $\int d^3x dt \nabla \cdot (\delta \phi \nabla \phi) = \oint \delta \phi \nabla \phi \cdot dA$; sendo dA o elemento de área da fronteira e $\phi(x,t) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$

→ Transformação de Legendre: $P \equiv \frac{df}{dx}$; $g(P) = P\ell(P) - f$

$$x = dg/dp$$

Usando essa Transformação para substituir $\dot{q}$ por P em $L(q, \dot{q}, t)$; $P = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ e assumindo que possamos

encontrar $\dot{q} = \vartheta(P; q, t)$; Definimos a Hamiltoniana como $H(P, q, t) \equiv [P\dot{q} - L(t, q, \dot{q})]_{\dot{q} = \vartheta(P; q, t)}$

As Equações de Euler-Lagrange se tornam então...

$\left. \frac{dP}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} \right|_{\dot{q} = \vartheta}$; onde a solução de $\frac{dq}{dt} = \vartheta(P; q, t)$ deve ser substituída após a diferenciação $\partial L / \partial q$.

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} (P\vartheta - L) = P \frac{\partial \vartheta}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \vartheta}{\partial q} = - \frac{\partial L}{\partial q}$$

$$\frac{\partial H}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} (P\vartheta - L) = \vartheta + P \frac{\partial \vartheta}{\partial P} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \vartheta}{\partial P} = \vartheta$$

logo... $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial P}$ e $\dot{P} = - \frac{\partial H}{\partial q}$

Na forma Hamiltoniana, a ação será:

$$S_H = \int [p\dot{q} - H(p, q, t)] dt$$

$$\delta S = \int \left[\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right] \delta p dt + \int \left[p \delta \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q \right] dt$$

$$\int p \delta \dot{q} dt = - \int \dot{p} \delta q dt \quad (\text{usando } [p \delta q] \Big|_{t_1}^{t_2} = 0)$$

$$\text{logo, } \frac{\delta S}{\delta p} = 0 \Rightarrow \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}; \quad \frac{\delta S}{\delta q} = 0 \Rightarrow \dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial q}$$

1.3 Quantização de Sistemas Hamiltonianos

$$(q(t), p(t)) \rightarrow (\hat{q}(t), \hat{p}(t)) \rightarrow [\hat{q}(t), \hat{p}(t)] = i\hbar \hat{1}$$

- Os operadores podem ser representados por matrizes (transformações lineares) em um espaço de estados apropriado
- Nem sempre precisamos especificar as representações e o espaço vetorial associado
- Equações de Heisenberg podem ser obtidas assumindo que as equações clássicas são recuperadas no limite $\hbar \rightarrow 0$; $\frac{d\hat{q}}{dt} = \frac{\partial H(\hat{p}, \hat{q}, t)}{\partial \hat{p}} + O(\hbar)$; $\frac{d\hat{p}}{dt} = -\frac{\partial H(\hat{p}, \hat{q}, t)}{\partial \hat{q}} + O(\hbar)$

Usando a identidade $[\hat{q}, f(\hat{p}, \hat{q})] = i\hbar \frac{\partial f}{\partial \hat{p}}$

obtemos

$$\frac{d\hat{q}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{q}, \hat{H}]; \quad \frac{d\hat{p}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{p}, \hat{H}]$$

1.4: Notação de Dirac

- Um espaço vetorial de dimensão finita é composto por uma coleção discreta de componentes.
- Em espaços com dimensão ~~infinita~~ infinita terão infinitas componentes. Ex: espaço vetorial complexo de funções integráveis em L^2 definido por todas as funções complexas ψ as quais $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(q)|^2 dq$ converge.

Uma função $\psi(q) \in L^2$ pode ser pensada como um conjunto de infinitas componentes $\psi_q \equiv \psi(q)$.

O ~~espaço~~ espaço de estados de uma massa pontual é exatamente L^2 , quando $q = x$.

Em TQC as coordenadas x são substituídas por configurações $\phi(x)$ e $\psi(x) \rightarrow \psi[\phi(x)]$.

• NOTAÇÃO DE Dirac: $\hat{A}: V \rightarrow V \Rightarrow \hat{A}(|\psi\rangle + \lambda|\omega\rangle) = \hat{A}|\psi\rangle + \hat{A}(\lambda|\omega\rangle)$

• formas lineares $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ são covetores e atuam nos vetores $|\psi\rangle$ levando ao número $\langle f|\psi\rangle$

• o Produto escalar $(|\psi\rangle, |\omega\rangle) = \langle \psi|\omega\rangle$ leva aos elementos de matriz p/ operadores $\hat{A}$ na base V como $\langle \psi|\hat{A}|\omega\rangle$

• Se $|\psi\rangle$ é um autovetor de $\hat{A}$, $\hat{A}|\psi\rangle = \psi|\psi\rangle$

→ Hermiticidade O Produto escalar é Hermitiano se $(\langle \psi|\omega\rangle)^* = \langle \omega|\psi\rangle$, e nesse caso $\langle \psi|\psi\rangle$ será um número real.

• O conjugado Hermitiano de $\hat{A}$, $\hat{A}^\dagger$ é definido por $\langle \psi|\hat{A}^\dagger|\omega\rangle = (\langle \omega|\hat{A}|\psi\rangle)^*$

A operação de conjugação Hermitiana obedece à

$$(\hat{A} + \hat{B})^\dagger = \hat{A}^\dagger + \hat{B}^\dagger; (\lambda \hat{A})^\dagger = \lambda^* \hat{A}^\dagger; (\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$$

- Um operador é Hermitiano se $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$, e anti-Hermitiano se $\hat{A} = -\hat{A}^\dagger$ e unitário se $\hat{A}^\dagger \hat{A} = \hat{A} \hat{A}^\dagger = \mathbb{I}$

→ O resultado de uma medida é sempre o autovetor de um operador $\hat{A}$ correspondente

→ Operadores correspondendo a Todos os observáveis são Hermitianos.

- Autovetores de um operador Hermitiano são sempre ortogonais: $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = 0$; $\forall \psi_1 \neq \psi_2$

Espaços de Hilbert

→ Em um espaço vetorial N -dimensional podemos encontrar uma base $|\psi\rangle = \sum_{n=1}^N \psi_n |e_n\rangle$

Com uma base ortonormal $\langle e_m | e_n \rangle = \delta_{mn}$, o produto escalar será $\langle \psi | \psi \rangle = \sum_{n=1}^N \psi_n^* \psi_n$

- Em um espaço com infinitas dimensões, a norma de $|\psi\rangle$

$$\langle \psi | \psi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n|^2 \text{ Precisa convergir.}$$

→ Um Espaço Hilbert é um espaço vetorial completo com um produto escalar Hermitiano.

Escolhendo o espaço de estado quânticos como separáveis podemos garantir que exista uma representação tal que $|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n |e_n\rangle$ converge.

Inversamente, o espaço de Hilbert separáveis pode ser visto como o espaço de infinitas $|\psi\rangle \equiv (c_1, c_2, \dots, c_n)$ tal que a soma $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ converge.

Exemplo: O espaço $L^2[a, b]$ das funções $\psi(q)$ definidas no intervalo $a < q < b$ é um espaço separável.

O produto escalar é $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int_a^b \psi_1^*(q) \psi_2(q) dq$

$$\hat{p}: \psi(q) \rightarrow -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial q}; \quad \hat{q}: \psi(q) \rightarrow q \psi(q)$$

COMENTÁRIO: Campos no espaço infinito precisam de condições de fronteira bem definidas

• Seja $\{|e_n\rangle\}$ uma base ortonormal em um espaço de Hilbert

separável: $\mathbb{1} = \sum_{n=1}^{\infty} |e_n\rangle \langle e_n|$; $|e_n\rangle \langle e_n| \psi\rangle \equiv (\langle e_n | \psi \rangle) |e_n\rangle$

→ AUTOVETORES GENERALIZADOS: $|q\rangle$ são autovetores de $\hat{q}$ em um espaço maior que o espaço de Hilbert separável

$$|\psi\rangle = \int dq \psi(q) |q\rangle; \quad \mathbb{1} = \int dq |q\rangle \langle q|; \quad \langle q|q'\rangle = \delta(q-q')$$

Em geral; $\langle q|\hat{A}|q'\rangle$ serão distribuições

$$\bullet \langle q_1|\hat{P}|q_2\rangle$$

$$\langle q_1|[\hat{q}, \hat{P}]|q_2\rangle = i\hbar \delta(q_1 - q_2) = (q_1 - q_2) \langle q_1|\hat{P}|q_2\rangle$$

Como $x^{-1}\delta(x)$ é indefinido, $F(q_1, q_2) = \langle q_1|\hat{P}|q_2\rangle$

Precisa ser transformada usando a representação de

Fourier $\delta(q) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ipq} dp$, $q \equiv q_1 - q_2$

$$\int e^{-ipq} \left\{ [i\hbar \delta(q_1 - q_2)] = (q_1 - q_2) F(q_1, q_2) \right\} dq$$

$$i\hbar = \int q F(q_1, q_1 - q) e^{-ipq} dq = i \frac{\partial}{\partial p} \int F(q_1, q_1 - q) e^{-ipq} dq$$

$$\hbar p + C(q_1) = \int F(q_1, q_1 - q) e^{-ipq} dq$$

$$F(q_1, q_2) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int (\hbar p + C) e^{ipq} dp = \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial q_1} + C(q_1) \right] \delta(q_1 - q_2)$$

$$\hat{P} + C(q_1) \rightarrow \hat{P}' : \langle \hat{P}' \rangle_{q_2} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_1} \delta(q_1 - q_2)$$

$$\bullet \langle p|q \rangle \Rightarrow \langle p|\hat{P}|q \rangle = p \langle p|q \rangle = \langle p| \left[\int dq_1 |q_1\rangle \langle q_1| \right] \hat{P}|q \rangle$$

$$= \int dq_1 \langle p|q_1 \rangle \langle q_1|\hat{P}|q \rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial q_1} \langle p|q_1 \rangle \delta(q_1 - q)$$

$$p \langle p|q \rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \langle p|q \rangle$$

Da mesma forma $q \langle p|q \rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \langle p|q \rangle$

Logo $\langle p|q \rangle = C \exp \left[-\frac{ipq}{\hbar} \right]; C = \sqrt{2\pi\hbar}$

Exemplo:

Sejam $|q\rangle, |p\rangle$ os autovetores normalizados de posição e momento em 1D

$$p|p_1\rangle = p_1|p_1\rangle \text{ e } \langle p_1|p_2\rangle = \delta(p_1 - p_2).$$

Mostre que $C = \sqrt{2\pi\hbar}$.

inserindo $\int |q\rangle \langle q| dq$ na definição $\delta(p_1 - p_2) = \langle p_1|p_2\rangle$

$$\delta(p_1 - p_2) = \int \langle p_1 | q \rangle \langle q | p_2 \rangle dq; \text{ mas } \langle p | q \rangle = C e^{-ipq/\hbar}, \text{ logo}$$

$$\delta(p_1 - p_2) = |C|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dq \exp\left[-\frac{i(p_1 - p_2)q}{\hbar}\right]$$

Por definição, a Transformada de Fourier de $f(x) = 1$;

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx \equiv 2\pi \delta(k) \text{ e } \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

Portanto $\delta(p_1 - p_2) = |C|^2 2\pi \hbar \delta(p_1 - p_2)$, logo $|C| = (\sqrt{2\pi\hbar})^{-1}$

Evolução na Teoria Quântica

- Quando consideramos apenas operadores com dependência temporal atuando sobre vetores de estado fixo estamos usando a REPRESENTAÇÃO DE HEISENBERG

Todo observável $\hat{A} \equiv f(\hat{p}, \hat{q})$ satisfaz $\frac{d\hat{A}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{A}, \hat{H}]$
E PODEMOS ESCREVER AS SOLUÇÕES

NA FORMA GERAL:

$$\hat{A}(t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}\right] \hat{A}(t_0) \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}\right]$$

Fazendo $t_0 = 0$, o valor esperado de $\hat{A}(t)$ em um estado $|\psi_0\rangle$ é $\langle A \rangle \equiv \langle \psi_0 | \hat{A}(t) | \psi_0 \rangle = \langle \psi_0 | e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \hat{A} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} | \psi_0 \rangle$

Definindo estados dependentes do tempo como $|\psi(t)\rangle \equiv e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} |\psi_0\rangle$ e o mesmo $\langle A \rangle$ é reescrito como $\langle \psi(t) | \hat{A}_0 | \psi(t) \rangle$ e o estado obedece à

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

Equação de Schrödinger

Ex: Oscilador Harmônico

Com a Hamiltoniana clássica $H(p, q) = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2}$ e as definições dos operadores $\hat{q}, \hat{p}$;

$$\hat{p}: \psi(q) \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \psi(q); \quad \hat{q}: \psi(q) \rightarrow q \psi(q)$$

Podemos escrever p/ o oscilador Harmônico

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(q) = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \psi(q) + \frac{\omega^2 q^2}{2} \psi(q)$$

DERIVAÇÃO DA EQUAÇÃO DE Schrödinger

P/ UMA PARTÍCULA LIVRE $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$

EM GERAL $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H(\psi)$

P/ SATISFAZER O PRINCÍPIO DE SUPERPOSIÇÃO,

H PRECISA SER UM OPERADOR LINEAR

• A Probabilidade $P = \int \psi^* \psi dx$ precisa ser conservada, o que implica em $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$;
 $\int \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) dx = 0$, que em termos de

$$H(\psi) \dots \frac{i}{\hbar} \int (\psi H^* \psi^* - \psi^* H \psi) dx = 0$$

~~OPERADORES HERMITIANOS OBEDECEM A~~

$$\int \psi_1^* O^\dagger \psi_2 dx = \int \psi_2 O^* \psi_1^* dx, \text{ logo}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} \int \psi^* (H^\dagger - H) \psi dx, \text{ PORTANTO se } H^\dagger = H \text{ A}$$

PROBABILIDADE É CONSERVADA

DETERMINAÇÃO DE H PELO PRINCÍPIO DA CORRESPONDÊNCIA:

No caso da PARTÍCULA LIVRE A EQUAÇÃO DE ONDA É OBTIDA A PARTIR DAS RELAÇÕES DE DE BROGLIE: $p = \hbar k$; $E = \hbar \omega$

$$\psi(r, t) = A e^{i(k \cdot r - \omega t)} \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega \psi; \nabla \psi = i\mathbf{k} \psi$$

REQUERENDO QUE $E = p^2/2m$ E DEFININDO

$$\hat{E} = \hat{H} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t}; \hat{p} = -i\hbar \nabla \Rightarrow i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad \text{VER ATRÁS}^*$$

PARA LIMITAR A FORMA DE H QUANDO FORÇAS ESTÃO PRESENTES VAMOS SUPOR $\langle V \rangle = V_{\text{class}}$.

A MÉDIA $\langle O \rangle = \bar{O}$ de QUALQUER OPERADOR SERÁ

SOLUÇÃO DE $\frac{d\bar{O}}{dt} = \int \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} O \psi + \psi^* O \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) dx +$

$$\bar{O} \quad \frac{d\bar{O}}{dt} = \frac{i}{\hbar} \int \psi^* [H, O] \psi dx + \int \psi^* \frac{\partial O}{\partial t} \psi dx$$

ESCREVENDO A 2ª Lei de NEWTON EM TERMOS DO POTENCIAL $\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x}$ E $\frac{dx}{dt} = p/m$

*ATRAS

UMA FUNÇÃO PERIÓDICA ARBITRÁRIA PODE SER ESCRITA
COMO: $\psi(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{2\pi i n x}{L}\right) \phi\left(\frac{2\pi n}{L}\right)$

SE L muito grande e $\phi(k)$ contínua, a
soma pode ser substituída por uma integral
ALÉM DISSO, USANDO $k = 2\pi n/L$; $dn = \frac{L}{2\pi} dk$; obtemos

$$\psi(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \phi(k) dk \quad (\text{Integral de Fourier})$$

$$\text{Logo, em } t=0; \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ikx} \phi(k)|_{t=0} dk;$$

MAS NO ESPAÇO LIVRE A QUANTIZAÇÃO DE PLANCK JÁ
INDICA QUE $\omega = \hbar k^2/2m$, logo p/ todo o t

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \phi(k)|_{t=0} \exp\left[i\left(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t\right)\right] dk$$

Como $E = \hbar\omega$ e $P = \hbar k$, A RELAÇÃO

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \phi(k) \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \exp[\dots] dk$$

É CORRESPONDENTE À $\left(E = \frac{P^2}{2m}\right) \psi$, POR SE

$$\hat{E} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{E} \quad \hat{P} = -i\hbar \nabla$$

"NA TEORIA QUÂNTICA NÃO PODEMOS DEFINIR AS DERIVADAS DE x E p PORQUE NÃO HÁ TRAJETÓRIAS CONTÍNUAS." MAS AS MÉDIAS DEVERIAM OBEDECER À:

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = - \int \psi^* \frac{\partial V}{\partial x} \psi dx;$$

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \int \psi^* \frac{p}{m} \psi dx = \int \psi^* \frac{\hbar}{im} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \text{ se quisermos}$$

RECAPESAR O LIMITE CLÁSSICO QUANDO $\hbar \rightarrow 0$.

PARA ESCREVER $d\bar{p}/dt$ EM TERMOS DE H , DEFINIMOS

$$H = \frac{p^2}{2m} + g \text{ E OBTENEMOS}$$

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{i}{\hbar} \int \psi^* \left[\left(\frac{p^2}{2m} p - p \frac{p^2}{2m} \right) + (gp - pg) \right] \psi dx, \text{ mas}$$

$$[p^2, p] = 0. \text{ ENTÃO TEMOS } (p = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x});$$

$$\int \psi^* \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} g \psi \right) dx = - \int \psi^* \frac{\partial V}{\partial x} \psi dx, \text{ ou}$$

$$\int \psi^* \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) \psi dx = 0 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow g = V + f$$

f deve obedecer à $\int \psi^* \frac{\partial f}{\partial x} \psi dx = 0 \quad \forall \psi$,

PORTANTO $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e $f = f(p)$. MAS $\bar{x}$ DEVE

OBEDECER À $\frac{d\bar{x}}{dt} = \int \psi^* \frac{p}{m} \psi dx$ E TAMBÉM À

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{i}{\hbar} \int \psi^* [H, x] \psi dx \rightarrow$$

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{1}{m} \int \psi^* \hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi dx + \frac{i}{\hbar} \int \psi^* [f(p)x - x f(p)] \psi dx$$

Logo $f(p)x - x f(p) = [f, x] = 0$; MAS

$$[p^n, x] = \frac{\hbar^n}{i^n} \left[\frac{\partial^n}{\partial x^n} (x\psi) - x \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} \right] \neq 0; \quad \boxed{f(p) \neq 0}$$

Logo, AS EQUAÇÕES DE NEWTON SÃO OBEDECIDAS NA MÉDIA SE ψ FOR UMA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi}$$

AUTOESTADOS DE H , $H\psi = E\psi$, SÃO DE PARTICULAR IMPORTÂNCIA POIS PODEMOS ESCRIVER QUALQUER ESTADO COMO $\psi(x, t) = \sum_E C_E [\psi_E(x)]_{t=0} \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$ SUA EVOL. TEMPORAL COMO

APLICAÇÕES BÁSICAS DA MECÂNICA QUÂNTICA

- A) POTENCIAL QUADRADO

B) OSCILADOR HARMÔNICO

C) OSCILADOR FORÇADO

A) QUANDO UM SISTEMA TEM ENERGIA DEFINIDA TODAS AS PROBABILIDADES SÃO CONSTANTES E O ESTADO É ESTACIONÁRIO. UMA SOL DA EQ. DE SCHRÖDINGER PODE SER FORMADA POR UMA COMBINAÇÃO LINEAR DAS FUNÇÕES

$$\psi = \psi_E(x) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \Rightarrow H\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(x)\psi = E\psi$$

REESCREVENDO COMO

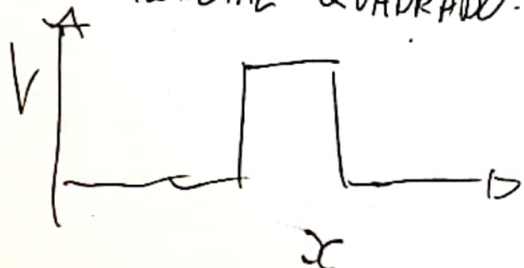
$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] \psi = 0$$

PODEMOS FAZER UM PARALELO COM A EQ. P/ UMA ONDA COM FREQ. DEFINIDA $\nabla^2 A + \frac{\omega^2}{c^2} n^2 A = 0 \rightarrow n^2 = \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] \frac{c^2}{\omega^2}$

ONDE n É O ÍNDICE DE REFRAÇÃO

QUANDO $V(x) = \text{const.}$ EM $a < x < b$ E 0 FORA DO INTERVALO TEMOS

UM POTENCIAL QUADRADO:



EX: FORÇAS APROXIMADAS ENTRE MOLÉCULAS, ENTRE PROTONS E NEUTRONS

EM QUALQUER REGIÃO ONDE V É CONSTANTE

$$\psi_E = A \exp\left[i\sqrt{2m(E-V)}\frac{x}{\hbar}\right] + B \exp\left[-i\sqrt{2m(E-V)}\frac{x}{\hbar}\right]$$

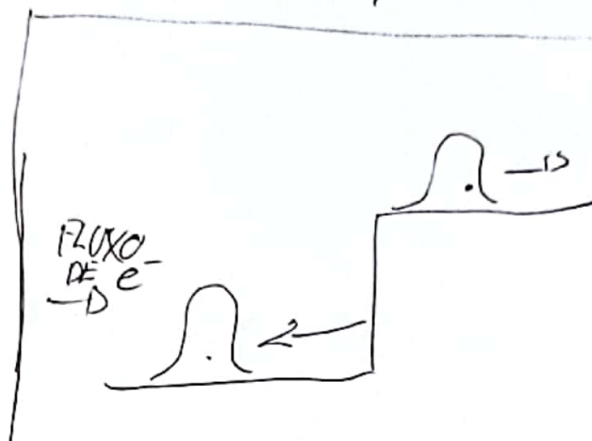
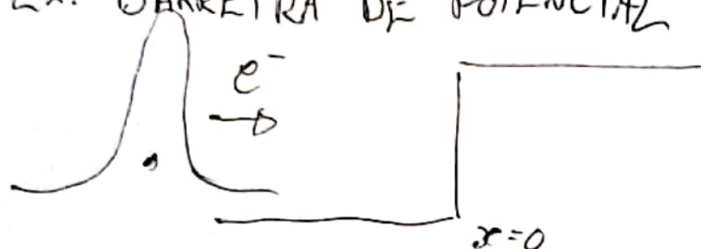
$$\psi(x,t) = A \exp\left[\frac{i(Px - Et)}{\hbar}\right] + B \exp\left[-\frac{i(Px + Et)}{\hbar}\right]$$

CASO A $E > V$

NAS FRONTEIRAS A, B PRECISAMOS IMPOR CONDIÇÕES

DE CONTINUIDADE.

Ex: BARREIRA DE POTENCIAL



A ESQUERDA DA BARREIRA: $\psi_1 = B \exp\left(\frac{iP_1 x}{\hbar}\right) + C \exp\left(-\frac{iP_1 x}{\hbar}\right)$

$$\psi_2 = A \exp\left(+i\frac{P_2 x}{\hbar}\right); \quad P_1 = \sqrt{2mE}; \quad P_2 = \sqrt{2m(E-V)}$$

$$\frac{d\psi_2}{dx} = \frac{iP_2 A}{\hbar} \exp\left(i\frac{P_2 x}{\hbar}\right); \quad \frac{d\psi_1}{dx} = \frac{iP_1}{\hbar} \left[B \exp\left(\frac{iP_1 x}{\hbar}\right) - C \exp\left(-\frac{iP_1 x}{\hbar}\right) \right]$$

EM $x=0$;

$$A = B + C; \quad P_2 A = P_1 (B - C)$$

$$\psi_2(0) = \psi_1(0)$$

$$A = \frac{2P_1 B}{P_1 + P_2}; \quad C = \frac{(P_2 - P_1)B}{P_1 + P_2}$$

AMPLITUDES DE ONDAS TRANSMITIDAS E REFLETIDAS

TAXA DE TRANSMISSIVIDADE
(FRACÃO DOS ELÉTRONS QUE PASSA)

$$T = \frac{|A|^2 P_2}{|B|^2 P_1} = \frac{4P_1 P_2}{(P_1 + P_2)^2}$$

REFLETIVIDADE

$$R = |C|^2$$

MOstrar QUE

$$T + R = 1$$

CASO B: $E < V$

NESSE CASO A EQUAÇÃO DE ONDA $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (V-E)\psi = 0$
 TEM SOLUÇÕES REAIS: $\psi = A \exp(\sqrt{2m(V-E)} \frac{x}{\hbar}) + B \exp(-())$
 P/ QUE AS PROBABILIDADES SEJAM FINITAS EM $x \rightarrow \infty$,
 $A=0$. P/ $x < 0$, $V=0$ E $\psi = C \exp(i\sqrt{2mE} \frac{x}{\hbar}) + D \exp(-i())$

EM $x=0$, PODEMOS VERIFICAR QUE $C+D=B$ E QUE

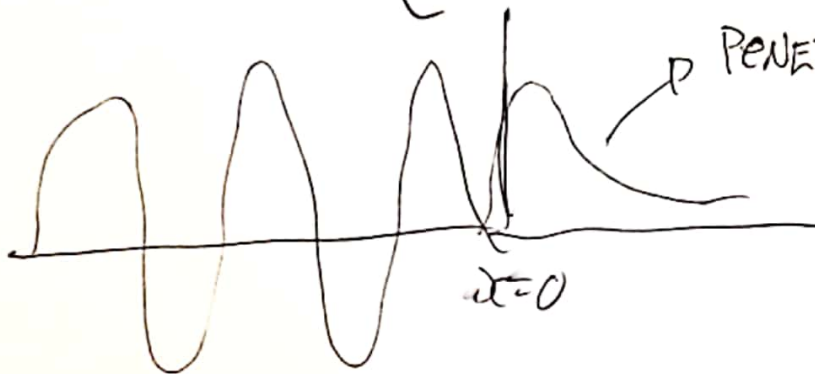
$$C-D = iB \sqrt{\frac{V-E}{E}} = p \quad C = \frac{B}{2} \left(1 + i \sqrt{\frac{V-E}{E}}\right)$$

NESSE CASO $R = \frac{|D|^2}{|C|^2} = 1$ $D = \frac{B}{2} \left(1 - i \sqrt{\frac{V-E}{E}}\right)$

ESCREVENDO $\tan \varphi = \sqrt{\frac{V-E}{E}}$; $C = \frac{B}{2 \cos \varphi} e^{i\varphi}$
 E P/ $x < 0$; $D = \frac{B}{2 \cos \varphi} e^{-i\varphi}$

$$\psi = \frac{B \cos(\sqrt{2mE} \frac{x}{\hbar} + \varphi)}{\cos \varphi}; \text{ E O ESTADO COMPLETO}$$

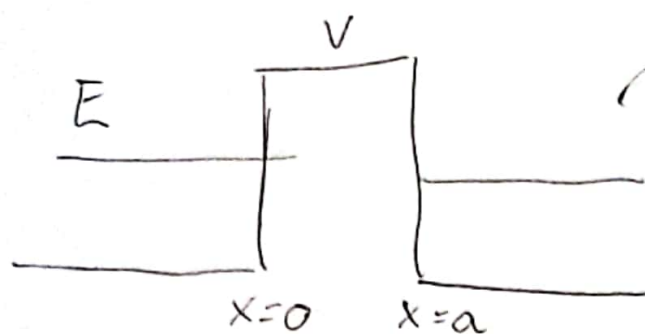
SERIA $\psi = B \left\{ (\cos \varphi)^{-1} \cos(\sqrt{2mE} \frac{x}{\hbar} + \varphi) + \exp(-\sqrt{2m(V-E)} \frac{x}{\hbar}) \right\}$



PENETRAÇÃO DA ONDA...
 MAS NÃO DA PARTÍCULA!

PENETRAÇÃO ATRAVÉS DE UMA BARREIRA

23



$\rightarrow P \quad x > a$

$$\psi = A \exp \frac{i P_1 x}{\hbar}$$

$$P_1 = \sqrt{2mE}$$

$$A = ?$$

DENTRO DA BARREIRA:

$$\psi = B \exp\left(\frac{P_2 x}{\hbar}\right) + C \exp\left(-\frac{P_2 x}{\hbar}\right); \quad P_2 = \sqrt{2m(V-E)}$$

Para que ψ e $\frac{d\psi}{dx}$ sejam contínuas em a ...

$$B = \frac{A}{2} \left(1 + \frac{i P_1}{P_2}\right) \exp\left[\left(i P_1 - P_2\right) \frac{a}{\hbar}\right] \quad \left| \begin{array}{l} \text{Se } P_2 a / \hbar \gg 1 \\ |C| \gg |B| \end{array} \right.$$

$$C = \frac{A}{2} \left(1 - \frac{i P_1}{P_2}\right) \exp\left[\left(i P_1 + P_2\right) \frac{a}{\hbar}\right]$$

Em $x < 0$, TEMOS $\psi = D \exp\left(\frac{i P_1 x}{\hbar}\right) + E \exp\left(-\frac{i P_1 x}{\hbar}\right)$
logo, EM $x=0$;

$$D + E = C + B; \quad D - E = \frac{i P_2}{P_1} (C - B)$$

$$D = \frac{C}{2} \left(1 + \frac{i P_2}{P_1}\right) + \frac{B}{2} \left(1 - \frac{i P_2}{P_1}\right)$$

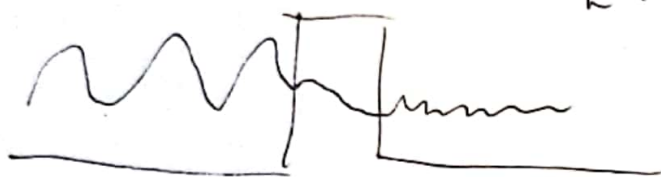
$$E = \frac{C}{2} \left(1 - \frac{i P_2}{P_1}\right) + \frac{B}{2} \left(1 + \frac{i P_2}{P_1}\right)$$

se $a \gg 1$ e $P_2 a / \hbar \gg 1$; $B \ll 1$, APROXIMAMOS ENTÃO...

$$D = \frac{A}{4} \left(1 + \frac{iP_2}{P_1}\right) \left(1 - \frac{iP_1}{P_2}\right) \exp\left[\frac{a}{\hbar}(P_1 + P_2)\right]$$

$$E = \frac{A}{4} \left(1 - \frac{iP_2}{P_1}\right) \left(1 - \frac{iP_1}{P_2}\right) \exp\left[\frac{a}{\hbar}(P_1 - P_2)\right]$$

$$\text{Logo } T = \frac{|A|^2}{|D|^2} = \frac{16 \exp(-2P_2 a/\hbar)}{\left[1 + (P_2/P_1)^2\right] \left[1 + (P_1/P_2)^2\right]}$$



APLICAÇÕES: DECAIMENTO ALFA DO NUCLEO

* JUNÇÕES DE JOSEPHSON / TUNELAMENTO DE CORRENTE

O POÇO DE POTENCIAL $V = -V_0$ na região $x = -a$ até $x = a$

Como V_0 é ATRATIVO, NENHUM ELÉTRON

DEVERIA SER REFLETIDO OU TRANSMITIDO CLASSICAMENTE

MAS QUANTICAMENTE... P/ $x > a$ $\psi = A \exp\left(\frac{iP_1 x}{\hbar}\right)$

P/ $-a < x < a$; $\psi = B \exp\left(\frac{iP_2 x}{\hbar}\right) + C \exp\left(-\frac{iP_2 x}{\hbar}\right)$

E P/ $x < -a$; $\psi = D \exp\left(\frac{iP_1 x}{\hbar}\right) + E \exp\left(-\frac{iP_1 x}{\hbar}\right)$

$$P_1 = \sqrt{2mE}; \quad P_2 = \sqrt{2m(E+V_0)}$$

Impondo as condições de continuidade, obtemos (depois de alguma álgebra):

$$D = \frac{A}{4} \exp\left(\frac{2iP_1 a}{\hbar}\right) \left[\left(1 + \frac{P_2}{P_1}\right) \left(1 + \frac{P_1}{P_2}\right) \exp\left(-\frac{2iP_2 a}{\hbar}\right) + \left(1 - \frac{P_2}{P_1}\right) \left(1 - \frac{P_1}{P_2}\right) \exp\left(\frac{2iP_2 a}{\hbar}\right) \right]$$

LEVA 'A

$$T = \frac{|A|^2}{|D|^2} = \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{P_1}{P_2} - \frac{P_2}{P_1} \right)^2 \sin^2\left(\frac{2P_2 a}{\hbar}\right) \right]^{-1}$$

OSCILADOR HARMÔNICO

Ex: ENERGIA POTENCIAL ENTRE OSCILADORES



$$V \approx \frac{K}{2} (x-a)^2$$

"QUALQUER SISTEMA PRÓXIMO AO EQUILÍBRIO PODE SER APROXIMADO PELO OSCILADOR HARMÔNICO".

P/ Um oscilador com constante de força K , $V(x) = \frac{Kx^2}{2}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + \left(\frac{m\omega^2 x^2}{2} - E \right) \psi = 0 ; x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} y ; E = \frac{\omega \hbar}{2} \epsilon$$

$$\frac{d^2 \psi}{dy^2} + (\epsilon - y^2) \psi = 0$$

Reescrevendo a equação de onda como

$$\left(\frac{d}{dy} - y\right)\left(\frac{d}{dy} + y\right)\psi_E = -(\epsilon - 1)\psi_E; \text{ onde}$$

ψ_E é a autofunção do autovalor ϵ

aplicando $\left(\frac{d}{dy} + y\right)$ pela esquerda e definindo

$$\varphi_E = \left(\frac{d}{dy} + y\right)\psi_E \rightarrow \left(\frac{d^2}{dy^2} - y^2\right)\varphi_E = -(\epsilon - 2)\varphi_E$$

Logo $\epsilon - 2$ também é autovalor de H e $\epsilon - 2n$ também

Será... mas $\epsilon > 0$, então o menor valor de ϵ é

$$\text{Tal que } \left(\frac{d}{dy} + y\right)\psi_E = 0 \rightarrow \frac{d^2\psi_E}{dy^2} - y^2\psi_E + \psi_E = 0 \quad \epsilon = 1$$

PORTANTO O MENOR VALOR de $\epsilon = 1$ E todos os valores permitidos tem que ser tais que $\epsilon - 2n = 1$; $\epsilon_n = 2n + 1$

A solução da EQ. p/ o ESTADO MAIS BAIXO: SERÁ:

$$\frac{d\psi_0}{\psi_0} = -y dy \rightarrow \psi_0 = A e^{-y^2/2} \rightarrow \int |\psi_0|^2 dy = 1;$$
$$A = 1/\sqrt{\pi}$$

$$\psi_n = C_n (-1)^n \left(\frac{d}{dy} - y\right)^n \psi_0 = C_n (-1)^n \left(\frac{d}{dy} - y\right)^n e^{-y^2/2}$$

Ex: $\psi_0 \sim e^{-y^2/2}$

$\psi_1 \sim 2y e^{-y^2/2}$

$\psi_2 \sim (2y^2 - 1) e^{-y^2/2}$

$H_n(y) = \text{HERMITE POLYNOMIALS}$

As condições de normalização...

$\psi_n^* = C_n^* e^{-y^2/2} h_n$ e $\psi = C_n (-1)^n e^{y^2/2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2/2}$

$\int \psi_n^* \psi_n dy = (-1)^n |C_n|^2 \int_{-\infty}^{\infty} h_n(y) \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2/2} dy = 1$

$= |C_n|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} \frac{d^n}{dy^n} h_n(y) dy$; $h_n(y) = \sum_{k=0}^n A_k y^k$
 $\frac{d^n}{dy^n} y^n = n!$

$\frac{d^n}{dy^n} h_n(y) = n! A_n$; mas em $(-1)^n e^{y^2/2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2/2}$ o coeficiente

de y^n se torna 2^n

$n=1: 2 e^{y^2/2} y e^{-y^2/2}$
 $n=2: e^{y^2/2} (-2 e^{-y^2/2} + 4 e^{-y^2/2} y^2)$
 $n=3: -e^{y^2/2} (12 y e^{-y^2/2} - 8 y^3 e^{-y^2/2})$

Portanto...

$|C_n| 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = 1$; $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = \sqrt{\pi}$; $C_n = (\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}})^{-1}$

Em função de $x = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} y$

$\psi_n(y) = \frac{(-1)^n e^{-y^2/2}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(y)$ e $\psi_n = \exp\left[-\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)\left(\frac{x^2}{2}\right)\right] H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right)$
 $\times \frac{(m\omega/\hbar)^{1/4}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}$

- O ESTADO DE VÁCUO É AQUELE COM A MENOR ENERGIA POSSÍVEL.

Ex: No oscilador harmônico clássico $q(t)$ satisfaz

$$\ddot{q} = -m\omega^2 q \rightarrow q(0) = \dot{q}(0) = 0 = \text{ESTADO DE MENOR ENERGIA}$$

QUANTIZANDO...

$$(q(t), p(t)) \rightarrow (\hat{q}, \hat{p}); [\hat{q}(t), \hat{p}(t)] = i\hbar$$

A SOLUÇÃO $\hat{q}(t) \equiv 0$ VIOLARIA AS RELAÇÕES DE COMUTAÇÃO...

ALÉM DISSO, VIMOS QUE PARA GARANTIR SOLUÇÕES COM ENERGIA E PROBABILIDADE POSITIVAS, O ESTADO DE MENOR ENERGIA DO OSCILADOR É DADO POR

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/2\hbar}$$

(PARÊNTESSES SOBRE OPERADORES DE CRIAÇÃO E DESTRUIÇÃO)

$$\text{DEFININDO } \hat{q} \equiv \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} x \text{ e } \hat{p} \equiv \left(\frac{1}{m\omega\hbar}\right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x}$$

A HAMILTONIANA DO OHI PODE SER

$$\text{REESCRITA COMO } \hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{p}^2 + \hat{q}^2)$$

DEFININDO OS OPERADORES: $a = \frac{\hat{q} + i\hat{p}}{\sqrt{2\hbar}}$; $a^\dagger = \frac{\hat{q} - i\hat{p}}{\sqrt{2\hbar}}$; $N \equiv a^\dagger a$
 $[a, a^\dagger] = 1$ (MOSTRE)

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} (aa^\dagger + a^\dagger a) = \hbar\omega (a^\dagger a + 1/2) = \hbar\omega (N + 1/2)$$

O ESPECTRO DE N SERÁ DADO PELOS VALORES $\forall$
 $N|\psi\rangle = \psi|\psi\rangle$; $\langle\psi|\psi\rangle \neq 0$; $\alpha|0\rangle \equiv 0$

$$N(\alpha|\psi\rangle) = \alpha(N-1)|\psi\rangle = \alpha(\psi-1)|\psi\rangle$$

OU SEJA $\alpha|\psi\rangle$ É TAMBÉM AUTOVETOR DE N COM AUTOVALOR $\psi-1$. ALÉM DISSO $|\alpha|\psi\rangle|^2 = |\langle\psi|\alpha^\dagger\alpha|\psi\rangle|$

$$\langle\psi|N|\psi\rangle = \psi\langle\psi|\psi\rangle = \psi \gg 0 ; \underline{\alpha|0\rangle = 0} \text{ P/ } \psi=0$$

$$N(\alpha^\dagger|\psi\rangle) = \alpha^\dagger(N+1)|\psi\rangle = (\psi+1)\alpha^\dagger|\psi\rangle$$

O ESPECTRO DE N CONSISTE DOS VALORES INTEIROS POSITIVOS $\psi=n$; $n=0,1,2,\dots$

$\alpha^\dagger|n\rangle$ É AUTOVETOR DE N COM AUTOVALOR $n+1$, logo
 $\alpha^\dagger|n\rangle \propto |n+1\rangle \Rightarrow \alpha^\dagger|n\rangle = C_n|n+1\rangle \Rightarrow \langle n|\alpha\alpha^\dagger|n\rangle = |C_n|^2 = n+1$

$$\alpha^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \Rightarrow \underline{|n\rangle = (n!)^{-1/2} (\alpha^\dagger)^n |0\rangle}$$

$$\text{Como } \langle n'|n\rangle = \delta_{n'n} \Rightarrow \langle n'|\alpha^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}$$

$$\langle n'|\alpha|n\rangle = n^{1/2}\delta_{n',n-1} \Rightarrow \alpha|n\rangle = n^{1/2}|n-1\rangle \quad \forall n \neq 0$$

RETORNANDO AO HAMILTONIANO, TEMOS

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle \Rightarrow \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{N} + 1/2)|n\rangle = \hbar\omega(n+1/2)|n\rangle$$

$$E_n = \hbar\omega(n+1/2) ; \underline{E_0 = \hbar\omega/2}$$

$$\text{PS: } [AB, C] = A[B, C] + [A, C]B \Rightarrow [N, \alpha] = -\alpha ; [N, \alpha^\dagger] = \alpha^\dagger$$

ENERGIA DE PONTO ZERO

• NO ESTADO DE VÁCUO DO OH QUÂNTICO A POSIÇÃO FLUTUA EM TORNO DE $q=0$ COM UMA AMPLITUDE TÍPICA DE $\delta q \sim \sqrt{\hbar/W}$. COMO PODEMOS DESCREVER O VÁCUO DE CAMPOS QUÂNTICOS DE MANEIRA ANALÓGA?

• A EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON

• ESSA EQUAÇÃO TEM SUA ORIGEM NA TENTATIVA DE CRIAR UMA EQ. DE ONDA RELATIVÍSTICA P/ O ELÉTRON...

A PARTIR DA DEFINIÇÃO RELATIVÍSTICA DE ENERGIA

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4; \quad E \rightarrow \hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}; \quad p \rightarrow \hat{p} = -i\hbar \nabla$$

$$\left[-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4 \right] \psi = \Rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \nabla^2 \psi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0$$

$$\text{DEFININDO } \square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \Rightarrow \left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0$$

MAS $P = \psi^* \psi \propto \frac{E}{mc^2}$ E $E = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$, LOGO TERÍAMOS

PROBABILIDADES NEGATIVAS QUANDO $E = -\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$...

IGNORADAS ATÉ O HISTÓRICO TRABALHO DE DIRAC 1928

"THE QUANTUM THEORY OF THE ELECTRON"

"A INTERPRETAÇÃO GERAL DA MECÂNICA QUÂNTICA NÃO-RELATIVÍSTICA É BASEADA NA TEORIA DA TRANSFORMAÇÃO, E SE TORNA POSSÍVEL PELA EQUAÇÃO DE ONDA NA FORMA $(H-W)\psi=0$, SENDO LINEAR EM $W(i\hbar \frac{\partial}{\partial t})$, TAL QUE A FUNÇÃO DE ONDA

EM QUALQUER MOMENTO DETERMINA A FUNÇÃO DE ONDA
 EM QUALQUER MOMENTO POSTERIOR. A EQUAÇÃO DE
 ONDA DA TEORIA RELATIVÍSTICA TAMBÉM DEVE SER LINEAR
 EM W SE A INTERPRETAÇÃO GERAL DEVE SER POSSÍVEL."
 Com $P_0 = \frac{W}{c}$; DIRAC PROPÕE A EQUAÇÃO $(\beta + \sum \alpha_i P_i + \beta) \psi = 0$
INDEP. DE P_0

ONDE α_i e β SÃO OPERADORES. SE A EQUAÇÃO DEVE
 SER VÁLIDA P/ UMA PARTÍCULA LIVRE NO ESPAÇO VAZIO
 α_i e β NÃO PODEM DEPENDER DE (x, x_i)

"~~A EQUAÇÃO~~ NÓS SOMOS OBRIGADOS A TER OUTRAS VARIÁVEIS
 DINÂMICAS ALÉM DAS COORDENADAS E MOMENTA DO ELÉTRON,
 PARA QUE α_i, β SEJAM FUNÇÕES DESTAS VARIÁVEIS. A FUNÇÃO
 DE ONDA DEVE ENVOLVER MAIS VARIÁVEIS DO QUE x_i, t ."

SPIN!! MAS RETORNANDO A EQ. DE KLEIN-GORDON.

$(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}) \psi = 0$ É TAMBÉM A EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

P/ O CAMPO ESCALAR CLÁSSICO OBTIDA A PARTIR DO
 LAGRANGEANO $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2$ E ENERGIA

$$E = \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L} \right] = \int d^3x \left[\frac{\dot{\phi}^2}{2} + \frac{(\nabla \phi)^2}{2} + \frac{m^2 \phi^2}{2} \right]$$

ESCREVENDO A DECOMPOSIÇÃO DE FOURIER P/ O CAMPO
 $\phi(x, t)$ (CLÁSSICO...)